EIN WARTESCHLANGENMODELL FÜR EIN SYSTEM MIT ENDLICH VIELEN WARTEPLÄTZEN.

Inaugural=Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Mathematisch=Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität des Saarlandes
vorgelegt von

G e r d S c h m i d t

aus

Klarenthal

Saarbrücken

1 9 6 4

Tag der mündlichen Prüfung: 22. Oktober 1964

Der Dekan: Prof. Dr. F. SEEL

Berichterstatter: Prof. Dr. H. SÖHNGEN

Prof. Dr. K. STANGE

EINLEITUNG: Die vorliegenden Untersuchungen behandeln das Problem, den Input eines Bedienungskanals zu regulieren; und zwar für den einfachen Fall, daß ein dem Bedienungs - schalter vorgelagerter Kontrollschalter sofort den Input an dem Bedienungskanal vorbeileitet, wenn die Warteschlange vor dem Bedienungsschalter einen vorgegebenen Maximalwert erreicht hat.

In dem ersten Teil werden unter weitgehend allgemeinen Voraussetzungen aus dem verbal gegebenen Modell mathematische Gleichungen hergeleitet, deren Gestalt für ein Modell ohne Kontrollschalter aus der Veröffentlichung von KEILSON und KOOHARIAN [7] bekannt ist. Es erfordert der zusätzliche Kontrollschalter nur eine geringe Modifikation der bereits bekannten Gleichungen. Das Hauptgewicht lag daher auf einer genauen Herleitung dieser Gleichungen, die in der zitierten Arbeit nur in wenigen Sätzen plausibel dargelegt werden.

Der zweite Teil zerfällt in zwei Abschnitte. In dem ersten Abschnitt wird unter speziellen Annahmen (Poisson-Input, exponentielle Abfertigung) aus den Bedingungs - gleichungen des ersten Teils ein endliches System linearer Differentialgleichungen hergeleitet und gelöst. Für dieses System haben J. E. MOYAL und C. R. HEATHCOTE [10] analytisch überaus komplizierte Lösungen angegeben. Eine bedeutend einfachere Lösung finden wir in dem Buch von MORSE [9] . Die Herleitung der zuletzt genannten Lösung ist ziemlich ungewöhnlich. In dieser Arbeit wird deshalb diese Lösung noch einmal ab-

geleitet; und zwar in der üblichen Weise mit Hilfe der LAPLACEtransformation und der charakteristischen Wurzeln der Koeffizientenmatrix. Ein Grenzübergang liefert dann auf einfache Weise die Lösung des entsprechenden unendlichen Differentialgleichungssystems (kein Kontrollschalter). Von beiden Lösungen wird das stationäre Verhalten diskutiert.

Der letzte Abschnitt beschäftigt sich mit der Belastungsperiode (busy period) des betrachteten speziellen Modells. Leider ist es - von einer Ausnahme abgesehen - nicht gelungen, von der Koeffizientenmatrix des entsprechenden Differentialgleichungssystem die charakteristischen Wurzeln anzugeben. Eine formelmäßige Darstellung der Verteilungsfunktion der Belastungsperiode wurde schließlich mit Hilfe der Methode der erzeugenden Funktion gewonnen. Dabei mußte allerdings eine komplizierte Darstellung der Lösung in Kauf genommen werden.

Der Dank des Verfassers gilt Herrn Professor Dr. H. SÖHNGEN, auf dessen Anregung hin die vorliegende Arbeit entstanden ist.

Gerd Schmidt

INHALT:

1. Das verbale Modell..... 1

11. Der Aufbau des Systems..... 1

12. Die Funktionen des Systems..... 1

2. Das mathematische Modell: Der allgemeine Fall..... 4

21. Hypothesen..... 4

22. Die stochastischen Variablen..... 5

23. Die Zustandsgleichungen..... 9

3. Das mathematische Modell: Ein Spezialfall..... 39

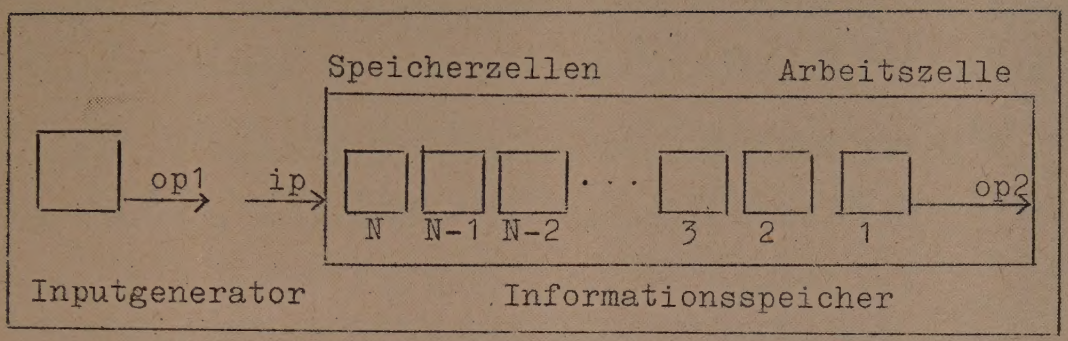
31. Die Besetzungswahrscheinlichkeiten..... 39

32. Die Belastungsperiode der Arbeitszelle..... 58

Bibliographie..... 69

1. DAS VERBALE MODELL.

11. DER AUFBAU DES SYSTEMS.



12. DIE FUNKTIONEN DES SYSTEMS.

121. OUTPUT (op1).

Der Inputgenerator sendet in zeitlicher Folge Signale als Informationsträger aus. Die Zeitspanne zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Signalen ist eine zufällige Größe. Diese Zeitspanne nennen wir die Aufbauzeit des am Ende dieser Zeitspanne von dem Inputgenerator ausgesandten Signals. Es besteht also die Vorstellung, daß jedes Signal eine gewisse Zeitspanne zu seinem Aufbau benötigt. Ist der Aufbau eines solchen Signals beendet, so sendet es der Inputgenerator unverzüglich aus und beginnt mit dem Aufbau des zeitlich folgenden Signals. Wir sagen: Der Inputgenerator arbeitet permanent.
Es wird angenommen, daß die Kenntnis der Aufbauzeiten beliebiger voraufgegangener Signale keine Information über die Größe der Aufbauzeiten nachfolgender Signale liefert. Es sei weiterhin angenommen, daß die Größe einer solchen Aufbauspanne von ihrer zeitlichen Lage unabhängig ist. Das Gesetz, das den Aufbauzeiten der

Signale zugrunde liegt, ist für alle Signale gleich und wird nicht beeinflußt durch die Anzahl der im Informationsspeicher registrierten Signale.

122. INPUT (ip).

Die von dem Inputgenerator ausgesandten Signale werden - mit einer Ausnahme, die wir gleich angeben werden - ohne Zeitverlust in den Zellen des Informationsspeichers registriert. Dies geschieht in der folgenden Weise: Wir denken uns alle Zellen numeriert (s. Schema unter 11.). Jede Zelle kann höchstens ein Signal aufnehmen. Ist in einer Zelle ein Signal registriert, so ist diese Zelle für weitere Signale besetzt. Wir nennen nicht besetzte Zellen freie Zellen. Ein ausgesandtes Signal wird dann in diejenige freie Zelle gespeichert, welche die niedrigste Nummer trägt. Sind alle Zellen besetzt, so geht das Signal verloren, womit die erwähnte Ausnahme erklärt ist.

123. OUTPUT (op2).

In der Arbeitszelle des Informationsspeichers wird, sofern sie nicht leer ist, eine Auswertung der von dem Signal in der Arbeitszelle mitgeführten Information vorgenommen. Diese Auswertung beginnt mit dem Zeitpunkt, in welchem das betreffende Signal in die Arbeitszelle gespeichert wird. Sie endet damit, daß das betreffende Signal gelöscht wird. Die Auswertungsdauer ist eine zufällige Größe. Die Kenntnis der Auswertungszeiten beliebiger voraufgegangener Signale liefert keine Information über die Größe der Auswertungszeiten nachfolgender Sig-

nale. Die Länge einer solchen Auswertungsdauer sei wiederum unabhängig von ihrer zeitlichen Lage. Das zugrunde liegende Gesetz sei für alle Signale gleich. Darüber hinaus sei die Auswertungsspanne eines Signals in der Arbeitszelle unabhängig von der Aufbauzeit des sich zur gleichen Zeit im Aufbau befindenden Signals und umgekehrt. Weiterhin ist die Auswertungsspanne unabhängig von der Anzahl der gleichzeitig registrierten Signale. Selbstverständlich kann keine Auswertung stattfinden, solange die Arbeitszelle und somit auch alle anderen Zellen leer sind.

124. DIE WARTEDISZIPLIN.

Die Arbeitszelle ist leer; die Auswertungsdauer beginnt mit der Einspeicherung eines Signals in die Arbeitszelle. Die Arbeitszelle ist nicht leer; es sind genau k $(k \leq N)$ Zellen besetzt, wenn das Signal in der Arbeitszelle gelöscht wird. Sofort wird der Inhalt der Zelle i $(i \leq k)$ in die Zelle $i-1$ umgespeichert. Es beginnt eine neue Auswertung in der Arbeitszelle. Die Zelle k wird frei, sofern nicht gleichzeitig ein neues Signal von dem Inputgenerator ausgesandt und in der Zelle k - als der freien Zelle mit der niedrigsten Nummer - registriert wird.

2. DAS MATHEMATISCHE MODELL: DER ALLGEMEINE FALL.

21. HYPOTHESEN.

Zur mathematischen Beschreibung eines verbal gegebenen Modells bieten sich im allgemeinen zwei Möglichkeiten: einmal eine deterministische und das andere Mal eine wahrscheinlichkeitstheoretische Fassung.

Wir streben in unserem Fall eine wahrscheinlichkeitstheoretische Form an, da uns keine Aussagen deterministischer Art über Aufbauspanne und Auswertungsdauer bekannt sind. Alle das Modell beschreibenden Größen sehen wir als stochastische Variablen an. Im streng mathematischen Sinn sind diese als P-meßbare Funktionen über einem BORELfeld $\mathfrak{F}$ eines Maßraumes $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ definiert. Um unsere Betrachtungen im streng mathematischen Sinn weiterführen zu können, müssen wir die Existenz sowohl eines den Fragen an das Modell angepaßten Maßraumes annehmen, als auch die Existenz der den kennzeichnenden Größen entsprechenden stochastischen Variablen fordern. Die Existenz dieser mathematischen Größen ist keineswegs a priori gesichert, es sei denn, wir könnten unmittelbar aus den Eigenschaften des verbal beschriebenen Modells den Maßraum und die entsprechenden stochastischen Variablen mathematisch fixieren. Da ein solcher Weg bei einem komplizierten Modell kaum möglich ist, wird man versuchen, diesen Maßraum mittelbar zu konstruieren.

Wir leiten zunächst unter Ausnutzung der Eigenschaften des verbalen Modells zwischen den Wahrscheinlichkeiten, daß bestimmte stochastische Variable bestimmte Wertebe-

reiche durchlaufen, Beziehungen her, deren Lösung wir suchen. Im Grunde genommen interessieren uns nur diese Lösungen und ihre mathematischen Eigenschaften, die wir dann wieder im Rahmen des Modells verbal zu deuten haben; doch müssen wir feststellen, um den hypothetischen Charakter unserer Untersuchungen loszuwerden, ob die gefundenen Lösungen überhaupt Wahrscheinlichkeiten sind, und auf ihrer Basis versuchen, den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ und die einzelnen stochastischen Variablen nachträglich mathematisch festzulegen.

22. DIE STOCHASTISCHEN VARIABLEN.

221. DIE GEGEBENEN GRÖSSEN.

Def. 1 UNTER DER AUFBAUZEIT Θ_g VERSTEHEN WIR EINE STOCHASTISCHE VARIABLE MIT DER FOLGENDEN EIGENSCHAFT:

$$P(\Theta_g < x) = G(x),$$

WOBEI $G(x)$ EINE VERTEILUNGSFUNKTION MIT DEN FOLGENDEN EIGENSCHAFTEN IST:

$G(x) = 0$ FÜR ALLE $x \leq 0$, $G(x) < 1$ FÜR ALLE $x < \infty$, $G(x)$ BESITZT EINE FÜR $x \neq 0$ STETIGE DICHTE $g(x)$ MIT $g(0) = \lim_{x \longrightarrow +0} g(x)$.

Def. 2 UNTER DER AUSWERTUNGSDAUER Θ_a VERSTEHEN WIR EINE STOCHASTISCHE VARIABLE DER FOLGENDEN EIGENSCHAFT:

$$P(\Theta_a < y) = A(y),$$

WOBEI $A(y)$ EINE VERTEILUNGSFUNKTION MIT DEN FOL-

GENDEN EIGENSCHAFTEN IST:

$A(y) = 0$ FÜR ALLE $y \leqq 0$, $A(y) < 1$ FÜR ALLE $y < \infty$;
$A(y)$ BESITZT EINE FÜR $y \neq 0$ STETIGE DICHTE $a(y)$
MIT $a(0) = \lim_{y \to +0} a(y)$.

Nutzen wir diese fünf Eigenschaften der Funktionen $G(x)$ und $A(y)$ aus, so folgen aus der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit die Beziehungen:

$$(221.1a)\quad P(\theta_g \geqslant x+\Delta t / \theta_g \geqslant x) = 1 - \frac{1}{1 - G(x)} \cdot \int_x^{x+\Delta t} g(\xi)\, d\xi,$$

$$(221.1b)\quad P(\theta_a \geqslant y+\Delta t / \theta_a \geqslant y) = 1 - \frac{1}{1 - A(y)} \cdot \int_y^{y+\Delta t} a(\eta)\, d\eta$$

für $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ und $\Delta t > 0$.
Für $x < 0$, $y < 0$ und Δt derart, daß $x+\Delta t$, $y+\Delta t \leq 0$, gilt:

$$(221.2)\quad P(\theta_g \geqslant x+\Delta t / \theta_g \geqslant x) = P(\theta_a \geqslant y+\Delta t / \theta_a \geqslant y) = 1.$$

Aus den Stetigkeitseigenschaften der Dichten $g(x)$ und $a(y)$ folgen die Entwicklungen:

$$(221.3a)\quad P(\theta_g \geqslant x+\Delta t / \theta_g \geqslant x) = 1 - \frac{g(x)}{1 - G(x)} \cdot \Delta t + o(\Delta t) \qquad (x \geqslant 0),$$

$$(221.3b)\quad P(\theta_a \geqslant y+\Delta t / \theta_a \geqslant y) = 1 - \frac{a(y)}{1 - A(y)} \cdot \Delta t + o(\Delta t) \qquad (y \geqslant 0).$$

Mit den Abkürzungen

$$(221.4)\quad \gamma(x) = \frac{g(x)}{1 - G(x)}, \quad \alpha(y) = \frac{a(y)}{1 - A(y)}$$

gilt für $x \geqslant 0$ und $y \geqslant 0$:

(221.5a) $G(x) = 1 - \exp(-\int_0^x \gamma(\xi)\, d\xi)$,

(221.5b) $A(y) = 1 - \exp(-\int_0^y \alpha(\eta)\, d\eta)$.

222. DIE ZUSTANDSVARIABLEN.

Zunächst müssen wir klären, was wir den Zustand des Systems nennen wollen. Es interessieren uns in der Hauptsache Aussagen darüber, mit wieviel Signalen der Speicher zu einem vorgegebenen Zeitpunkt t besetzt ist und welchen zeitlichen Änderungen diese Anzahl unterworfen ist. Wenn aber die Anzahl der Signale im Speicher in einem gegebenen Zeitpunkt nicht genügt, diese Anzahl für die darauffolgenden Zeitpunkte zu bestimmen, so liegt es nahe, daß wir noch als weitere kennzeichnende Größen solche hinzunehmen, welche die Änderungen dieser Anzahl beschreiben. Eine solche Änderung kann auf zwei verschiedene Weisen zustande kommen: Entweder es wird ein Signal in der Arbeitszelle gelöscht oder es wird ein Signal von dem Inputgenerator ausgesandt und in dem Speicher registriert. Diese Überlegungen führen zu den Definitionen der folgenden stochastischen Variablen.

Def. 3 MIT x_t WOLLEN WIR DIEJENIGE STOCHASTISCHE VARIABLE BEZEICHNEN, DIE ANGIBT, WIEVIELE ZELLEN DES INFORMATIONSSPEICHERS ZUR ZEIT t BESETZT SIND. WIR NENNEN x_t DIE BESETZUNGSZAHL DES SPEICHERS. DIE MÖGLICHEN WERTE DIESER VARIABLEN SIND DIE ZAHLEN 0,1,2, 3,...,N.

Def. 4 MIT σ_t BEZEICHNEN WIR DIE FOLGENDE STOCHASTISCHE

VARIABLE: IM ZEITPUNKT t SIND σ_t ZEITEINHEITEN VERGANGEN, SEIT DAS ZEITLICH LETZTE SIGNAL DEN INPUTGENERATOR VERLASSEN HAT. DIE MÖGLICHEN WERTE DIESER VARIABLEN SIND DURCH DAS INTERVALL $[0,\infty)$ GEKENNZEICHNET. DARÜBER HINAUS SETZEN WIR SINNGEMÄß $\sigma_t = +\infty$, WENN BIS ZU DEM ZEITPUNKT t NOCH KEIN SIGNAL DEN INPUTGENERATOR VERLASSEN HAT.

Def. 5 MIT χ_t KENNZEICHNEN WIR DIE FOLGENDE STOCHASTISCHE VARIABLE: IM ZEITPUNKT t SIND χ_t ZEITEINHEITEN VERGANGEN, SEIT DAS ZEITLICH LETZTE SIGNAL IN DER ARBEITSZELLE GELÖSCHT WORDEN IST. DIE MÖGLICHEN WERTE DIESER VARIABLEN SIND WIEDER DURCH DAS INTERVALL $[0,\infty)$ GEKENNZEICHNET, WOBEI WIR ZUSÄTZLICH $\chi_t = +\infty$ SETZEN, WENN BIS ZU DEM ZEITPUNKT t NOCH KEIN SIGNAL IN DER ARBEITSZELLE GELÖSCHT WORDEN IST.

Def. 6 τ_t IST DAS SYMBOL FÜR DIE FOLGENDE STOCHASTISCHE VARIABLE: DIE ARBEITSZELLE IST IM ZEITPUNKT t ENTWEDER BESETZT UND ES SIND $\tau_t \geq 0$ ZEITEINHEITEN VERGANGEN, SEIT DAS SIGNAL, DAS IN DIESEM ZEITPUNKT IN DER ARBEITSZELLE STEHT, IN DIESE EIN- (ODER UM-) GESPEICHERT WURDE, ODER SIE IST ZUR ZEIT t LEER, UND WIR ORDNEN DER VARIABLEN DEN WERT -1 ZU.

Mathematisch wird der Zustand des Systems durch den dreidimensionalen stochastischen Prozeß (x_t, σ_t, χ_t) gekennzeichnet. Um den Zustandsraum dieses Prozesses eindeutig aus den Zustandsintervallen der einzelnen stochastischen Variablen aufzubauen benötigen wir eine Konvention: Tritt in einem Zeitpunkt t eine Änderung des Systemzustandes

ein, etwa daß in diesem Zeitpunkt ein Signal ausgesandt oder gelöscht wird, so nehmen wir als Besetzungszahl des Speichers in diesem Zeitpunkt denjenigen Wert, der sich unmittelbar (mathematisch: zum Zeitpunkt t+0) nach der Änderung eingestellt hat.

Aus den Untersuchungen des folgenden Abschnittes werden wir erkennen, daß dieser Prozeß markoffsch ist. Dabei verstehen wir unter "markoffsch" in freier Übertragung: Ist der gegenwärtige Zustand des Prozesses bekannt, so können wir die Zukunft dieses Prozesses im Rahmen von Wahrscheinlichkeitsaussagen eindeutig vorherbestimmen.

23. DIE ZUSTANDSGLEICHUNGEN.

231. DIE BASISGLEICHUNGEN.

Die Gegenwart des Prozesses werde durch den Zeitpunkt t_o angegeben, den wir ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit der Ergebnisse als zeitlichen Ursprung wählen können. Wir nehmen an, daß in diesem Zeitpunkt $t_o = 0$ das System schon genügend lang in Betrieb ist. Wir besitzen über den Zustand des Systems zu diesem Zeitpunkt gewisse Informationen. In welcher Form - mathematisch gesehen - diese Informationen uns bekannt sind, bleibe vorerst noch dahingestellt. Wir wollen uns zunächst der Schar der Verteilungsfunktionen des Prozesses (x_t, σ_t, χ_t) zuwenden. Damit ein im Rahmen dieser Arbeit vertretbarer Aufwand zur Herleitung der das allgemeine Modell kennzeichnenden Gleichungen nicht überschritten wird, wollen wir einige a-priori-Voraussetzungen über eben diese Schar von Vertei-

lungsfunktionen als erfüllt ansehen und unter diesen Voraussetzungen, die rein mathematischer Natur sind und nicht aus dem verbalen Modell abgeleitet werden können, die erwähnten Gleichungen herleiten.
Wir beginnen damit, daß wir zwei Funktionenklassen definieren, die im wesentlichen schon die a-priori-Hypothesen enthalten. Eine Motivierung dieser Hypothesen ergibt sich aus der noch ausstehenden Rechnung.

Def. 7 EINE FUNKTION $f(x,t)$ HEISST DER FUNKTIONENKLASSE $D^{(2)}$ ZUGEHÖREND, WENN $f(x,t)$ FÜR $x>0$, $t>0$ UND $x \neq t$ ZWEIDIMENSIONAL MINDESTENS EINMAL STETIG DIFFERENZIERBAR IST, FÜR $x \geqslant 0$, $t \geqslant 0$ UND $x \neq t$ STETIG IST UND AUF JEDEM ENDLICHEN, ABGESCHLOSSENEN BEREICH BESCHRÄNKT BLEIBT.

Def. 8 EINE FUNKTION $f(x,y,t)$ HEISST DER FUNKTIONENKLASSE $D^{(3)}$ ZUGEHÖREND, WENN $f(x,y,t)$ FÜR $x>0$, $y>0$, $t>0$, $x \neq y$, $x \neq t$ UND $y \neq t$ DREIDIMENSIONAL MINDESTENS EINMAL STETIG DIFFERENZIERBAR, FÜR $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $t \geqslant 0$, $x \neq y$, $x \neq t$ UND $y \neq t$ STETIG IST UND AUF JEDEM ENDLICHEN, ABGESCHLOSSENEN BEREICH AUS $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ UND $t \geqslant 0$ BESCHRÄNKT BLEIBT.

Wir werden uns nun mit den Zuständen des Systems beschäftigen und sie im Hinblick auf die möglichen Werte der Besetzungszahl ordnen.

Ist $x_t = 0$, so gilt notwendig $\sigma_t > \chi_t$. Die Gegenannahme $\sigma_t \leq \chi_t$ führt zwangsläufig zu der Aussage $x_t \geqslant 1$: Wäre nämlich - vom Zeitpunkt t her gesehen - das zuletzt ge-

löschte Signal zu einem Zeitpunkt aus der Arbeitszelle entfernt worden, in dem das zuletzt registrierte Signal noch gar nicht ausgesandt war, so müßte im Zeitpunkt t mindestens ein Signal in der Arbeitszelle stehen.

Hyp. 1 FÜR DIE WAHRSCHEINLICHKEIT $P(x_t=0 \wedge \sigma_t < x)$ GIBT ES EINE DICHTE $U(x,t)$ AUS $D^{(2)}$ DERART, DASS FÜR ALLE $t>0$

$$P(x_t=0 \wedge \sigma_t < x) = \int_0^x U(\xi,t)\, d\xi \quad \text{IST.}$$

Im Falle $x_t = 1$ treten zwei grundverschiedene Situationen ein, je nachdem $\sigma_t \geq \chi_t$ oder $\sigma_t < \chi_t$ ist. Der Fall $\sigma_t < \chi_t$ entspricht dem folgenden Vorgang: Im Zeitpunkt $t - \chi_t$ wird das letzte Signal im Speicher gelöscht. Der Speicher steht leer bis zu dem Zeitpunkt $t - \sigma_t$, in dem ein Signal ausgesandt wird, das sofort in die Arbeitszelle gespeichert wird und dessen Auswertung mit diesem Zeitpunkt beginnt; es gilt die Gleichung $\sigma_t = \tau_t$.

Hyp. 2 FÜR DIE WAHRSCHEINLICHKEIT $P(x_t=1 \wedge \sigma_t < x \wedge \sigma_t < \chi_t)$ GIBT ES EINE DICHTE $V(x,t)$ AUS $D^{(2)}$ DERART, DASS FÜR ALLE $t>0$

$$P(x_t=1 \wedge \sigma_t < x \wedge \sigma_t < \chi_t) = \int_0^x V(\xi,t)\, d\xi \quad \text{IST.}$$

In dem zweiten Fall $\sigma_t \geq \chi_t$ wissen wir auf Grund der Definitionen der stochastischen Größen σ_t und χ_t, daß in dem Intervall $(t-\chi_t, t]$ keine Zustandsänderung eingetraten ist. Gehen wir von der Voraussetzung $x_t = 1$ aus, so muß gemäß unserer Konvention über die Zustände des Systems $x_{t-\chi_t}$ ebenfalls gleich 1 gesetzt werden.

Somit wurde simultan mit dem Löschvorgang ein Signal in die Arbeitszelle gespeichert: $\chi_t = \tau_t$.

Hyp. 3 FÜR DIE WAHRSCHEINLICHKEIT $P(x_t=1 \wedge \sigma_t < x \wedge \chi_t < y \wedge \chi_t \leq \sigma_t)$ GIBT ES EINE DICHTE $W_1(x,y,t)$ AUS $D^{(3)}$ DERART, DASS FÜR ALLE $t>0$

$$P(x_t=1 \wedge \sigma_t < x \wedge \chi_t < y \wedge \chi_t \leq \sigma_t) = \int_0^x \int_0^y W_1(\xi,\eta,t)\, d\eta\, d\xi \quad \text{IST.}$$

Dabei verschwindet $W_1(x,y,t)$ für alle Paare (x,y) mit $y \geq x > 0$, was wir sofort aus der folgenden Überlegung entnehmen können:
Es gelte $0 < x_1 < x_2 \leq y_1 < y_2$. Dann folgt aus $x_1 \leq \sigma_t < x_2$ und $y_1 \leq \chi_t < y_2$ $\sigma_t < \chi_t$. Also ist die folgende Wahrscheinlichkeit $P(x_t=1 \wedge x_1 \leq \sigma_t < x_2 \wedge y_1 \leq \chi_t < y_2 \wedge \chi_t \leq \sigma_t) = 0$.

Auf Grund der Hypothesen 2 und 3 gilt:

$$P(x_t=1) = \int_0^\infty V(x,t)\, dx + \int_0^\infty \int_0^\infty W_1(x,y,t)\, dy\, dx.$$

Im Falle $x_t = n$ $(1 < n \leq N)$ ist keine Fallunterscheidung bezüglich einer Größenrelation zwischen σ_t und χ_t notwendig, doch wollen wir beachten, daß für $x_t = N$ χ_t niemals kleiner als σ_t sein kann, sonst könnte der Speicher im Zeitpunkt t nicht vollkommen besetzt sein.

Hyp. 4 FÜR DIE WAHRSCHEINLICHKEIT $P(x_t=n \wedge \sigma_t < x \wedge \chi_t < y)$ GIBT ES EINE DICHTE $W_n(x,y,t)$ AUS $D^{(3)}$ DERART, DASS FÜR ALLE $t>0$

$$P(x_t=n \wedge \sigma_t < x \wedge \chi_t < y) = \int_0^x \int_0^y W_n(\xi,\eta,t)\, d\eta\, d\xi \quad \text{IST.}$$

Dabei verschwindet die Funktion $W_N(x,y,t)$ in dem Bereich $x \geqslant y > 0$ identisch.

Unter der Annahme dieser vier Hypothesen gelten in allen Punkten (x,t) und (x,y,t), in den die Funktionen $U(x,t)$, $V(x,t)$ und $W_n(x,y,t)$ $(1 \leqslant n \leqslant N)$ differenzierbar sind, die folgenden Gleichungen:

(231.1) $$\frac{\partial}{\partial t} U(x,t) + \frac{\partial}{\partial x} U(x,t) + \gamma(x)U(x,t) = \alpha(x)V(x,t) + \int_0^\infty W_1(x,y,t)\alpha(y)\,dy, \qquad \text{für } x>0,\ t>0$$

(231.2) $$\frac{\partial}{\partial t} V(x,t) + \frac{\partial}{\partial x} V(x,t) + (\gamma(x) + \alpha(x))V(x,t) = 0, \qquad \text{für } x>0,\ t>0$$

(231.3a) $$\frac{\partial}{\partial t} W_1(x,y,t) + \frac{\partial}{\partial x} W_1(x,y,t) + \frac{\partial}{\partial y} W_1(x,y,t) = -(\gamma(x) + \alpha(y))W_1(x,y,t), \qquad \text{für } x>y>0,\ t>0$$

(231.3b) $$W_1(x,y,t) = 0, \qquad \text{für } y \geqslant x > 0,\ t>0$$

(231.4) $$\frac{\partial}{\partial t} W_n(x,y,t) + \frac{\partial}{\partial x} W_n(x,y,t) + \frac{\partial}{\partial y} W_n(x,y,t) = -(\gamma(x) + \alpha(y))W_n(x,y,t), \quad (1<n<N) \qquad \text{für } x>0, y>0, t>0$$

(231.5a) $$\frac{\partial}{\partial t} W_N(x,y,t) + \frac{\partial}{\partial x} W_N(x,y,t) + \frac{\partial}{\partial y} W_N(x,y,t) = -(\gamma(x) + \alpha(y))W_N(x,y,t), \qquad \text{für } y>x>0,\ t>0$$

(231.5b) $$W_N(x,y,t) = 0 \qquad \text{für } x \geqslant y > 0,\ t>0.$$

Auf den folgenden Seiten wollen wir darstellen, wie man diese Gleichungen aus dem verbalen Modell gewinnt.

Die Gleichungen (231.3b) und (231.5b) sind schon geklärt. Wir können uns daher ausschließlich der Herleitung der einzelnen Differentialgleichungen widmen. Stellvertretend für alle anderen Differentialgleichungen führen wir diese Herleitung an dem Beispiel der Gleichung (231.4) durch. Unsere folgenden Untersuchungen können im Falle der Gleichungen (231.3a) und (231.5a) wörtlich für die Bereiche $x > y > 0$ bzw. $y > x > 0$ übertragen werden. Die beiden ersten Differentialgleichungen bedürfen noch einer zusätzlichen Betrachtung, die wir im Verlaufe unserer Untersuchungen noch angeben werden.

Da eine Umspeicherung der Signale simultan mit dem Löschvorgang des Signals in der Arbeitszelle vorgenommen wird, gilt:

$$P(x_t=n \wedge x_1 \leq \sigma_t < x_2 \wedge y_1 \leq \chi_t < y_2)$$
$$= P(x_t=n \wedge x_1 \leq \sigma_t < x_2 \wedge y_1 \leq \tau_t < y_2).$$

Und wir können $W_n(x,y,t)$ auch als Dichte der zuletzt angeführten Wahrscheinlichkeit ansehen.

Es sei (x,y,t) ein Punkt des Bereichs, in dem $W_n(x,y,t)$ differenzierbar und somit auch stetig ist. Auf Grund der Voraussetzungen über die Funktionenklasse $D^{(3)}$ ist dann auch $(x+\Delta t, y+\Delta t, t+\Delta t)$ ein Stetigkeitspunkt von $W_n(x,y,t)$, und es gilt:

(231.6)
$$P(x_{t+\Delta t}=n \wedge x+\Delta t \leq \sigma_{t+\Delta t} < x+\delta x+\Delta t \wedge y+\Delta t \leq \tau_{t+\Delta t} < y+\delta y+\Delta t)$$
$$= W_n(x+\Delta t, y+\Delta t, t+\Delta t)\delta x \delta y + o(\delta x \delta y).$$

In der Folge verstehen wir unter $\{\theta_g^t \geq x\}$ das Ereignis: Das zur Zeit t sich im Aufbau befindende Signal hat

eine Aufbauzeit, die den Wert x nicht unterschreitet, und unter $\{\theta_a^t \geq y\}$ das Ereignis: Das zur Zeit t sich in der Arbeitszelle befindende Signal hat eine Auswertungszeit, die den Wert y nicht unterschreitet.
Mit diesen Bezeichnungen gilt folgende Gleichungskette:

(231.7)
$$\begin{aligned} & P(x_{t+\Delta t}=n \wedge x+\Delta t \leq \sigma_{t+\Delta t} < x+\delta x+\Delta t \wedge y+\Delta t \leq \tau_{t+\Delta t} < y+\delta y+\Delta t) \\ &= P(x_t=n \wedge x+\Delta t \leq \sigma_{t+\Delta t} < x+\delta x+\Delta t \wedge y+\Delta t \leq \tau_{t+\Delta t} < y+\delta y+\Delta t) \\ &= P(x_t=n \wedge x+\Delta t \leq \sigma_{t+\Delta t} \wedge x \leq \sigma_t < x+\delta x \wedge \theta_g^t \geq x+\Delta t \wedge \theta_g^t \geq x \\ &\qquad \wedge y+\Delta t \leq \tau_{t+\Delta t} \wedge y \leq \tau_t < y+\delta y \wedge \theta_a^t \geq y+\Delta t \wedge \theta_a^t \geq y). \end{aligned}$$

Die erste dieser Gleichungen gewinnen wir mit folgender Überlegung: Wir gehen von der Tatsache $x_{t+\Delta t} = n$ aus. Da $x > 0$ und $y > 0$, $x+\Delta t \leq \sigma_{t+\Delta t}$ und $y+\Delta t \leq \tau_{t+\Delta t}$ gilt, kann in dem Intervall $[t, t+\Delta t]$ keine Änderung des Systemzustandes eingetreten sein. Nach unserer Konvention muß $x_t = n$ sein. Gehen wir umgekehrt von der Annahme $x_t = n$ aus, so folgt aus den gleichen Überlegungen $x_{t+\Delta t} = n$. Die Ungleichung $x+\Delta t \leq \sigma_{t+\Delta t} < x+\delta x+\Delta t$ impliziert die Relation $x \leq \sigma_t < x+\delta x$, die Ungleichung $y+\Delta t \leq \tau_{t+\Delta t} < y+\delta y+\Delta t$ impliziert $y \leq \tau_t < y+\delta y$. Die Ereignisse $\{x \leq \sigma_t < x+\delta x\}$ bzw. $\{y \leq \tau_t < y+\delta y\}$ haben die Ereignisse $\{\theta_g^t \geq x\}$ bzw. $\{\theta_a^t \geq y\}$ zur Folge. Da in dem Intervall $[t, t+\Delta t]$ keine Änderung in dem System eintritt, folgen aus den Ereignissen $\{x \leq \sigma_t < x+\delta x\} \wedge \{x+\Delta t \leq \sigma_{t+\Delta t}\} \wedge \{\theta_g^t \geq x\}$ bzw. $\{y \leq \tau_t < y+\delta y\} \wedge \{y+\Delta t \leq \tau_{t+\Delta t}\} \wedge \{\theta_a^t \geq y\}$ die Ereignisse $\{\theta_g^t \geq x+\Delta t\}$ bzw. $\{\theta_a^t \geq y+\Delta t\}$, womit die zweite Gleichung in (231.7) gerechtfertigt ist.

Wir wollen in dem letzten Term von (231.7) die Ereignisse $\{x+\Delta t \leq \sigma_{t+\Delta t}\}$ und $\{y+\Delta t \leq \tau_{t+\Delta t}\}$ zu sicheren Ereignissen ergänzen und betrachten die folgenden Wahrschein-

lichkeiten:

$$(231.8)\qquad P(x_t=n \wedge 0 \le \sigma_{t+\Delta t} < x+\Delta t \wedge x \le \sigma_t < x+\delta x \wedge \theta_g^t \ge x+\Delta t \wedge \theta_g^t \ge x \wedge y+\Delta t \le \tau_{t+\Delta t} \wedge y \le \tau_t < y+\delta y \wedge \theta_a^t \ge y+\Delta t \wedge \theta_a^t \ge y)$$

$$= P(x_t=n \wedge 0 \le \sigma_{t+\Delta t} < \delta x \wedge x \le \sigma_t < x+\delta x \wedge \theta_g^t \ge x+\Delta t \wedge \theta_g^t \ge x \wedge y+\Delta t \le \tau_{t+\Delta t} \wedge y \le \tau_t < y+\delta y \wedge \theta_a^t \ge y+\Delta t \wedge \theta_a^t \ge y).$$

Diese Identität läßt sich in folgender Weise begründen: Wir wählen in allen folgenden Betrachtungen die Größen δx, δy und Δt immer so, daß die Ungleichungen $0 < \delta x < \Delta t$ und $0 < \delta y < \Delta t$ erfüllt sind. Diese Wahl stellt keine Einschränkung dar, da wir später zuerst die Grenzübergänge "δx gegen 0" und "δy gegen 0" betrachten und dann den Grenzübergang "Δt gegen 0" vornehmen werden. Bei dieser Wahl folgt aus dem kombinierten Ereignis $\{x \le \sigma_t < x+\delta x\} \wedge \{\theta_g^t \ge x+\Delta t\}$, daß in dem Intervall $[t-x, t+\Delta t-\delta x]$ kein Signal ausgesandt worden ist. Aus dem Ereignis $\{\delta x \le \sigma_{t+\Delta t} < x+\Delta t\}$ folgt aber, daß in diesem Intervall zumindest ein Signal den Inputgenerator verlassen hat. Das kombinierte Ereignis $\{\delta x \le \sigma_{t+\Delta t} < x+\Delta t\} \wedge \{x \le \sigma_t < x+\delta x\} \wedge \{\theta_g^t \ge x+\Delta t\}$ ist unmöglich, seine Wahrscheinlichkeit 0, und (231.8) ist bewiesen.

Aus dem kombinierten Ereignis $\{0 \le \sigma_{t+\Delta t} < \delta x\} \wedge \{x \le \sigma_t < x+\delta x \wedge \{\theta_g^t \ge x+\Delta t\}$ folgt, daß dasjenige Signal, das zur Zeit t noch im Aufbau war, zur Zeit $t+\Delta t$ ausgesandt sein muß. Seine Aufbauzeit war spätestens nach $x+\delta x+\Delta t$ Zeiteinheiten beendet: also $x+\Delta t \le \theta_g^t < x+\delta x+\Delta t$. Diese Überlegung liefert für die Wahrscheinlichkeiten in (231.8) folgende Abschätzung:

$$(231.9)\qquad P(x_t=n \wedge 0 \le \sigma_{t+\Delta t} < x+\Delta t \wedge x \le \sigma_t < x+\delta x \wedge \theta_g^t \ge x+\Delta t \wedge \theta_g^t \ge x \wedge y+\Delta t \le \tau_{t+\Delta t} \wedge y \le \tau_t < y+\delta y \wedge \theta_a^t \ge y+\Delta t \wedge \theta_a^t \ge y)$$

$$\le P(x_t=n \wedge x+\Delta t \le \theta_g^t < x+\delta x+\Delta t \wedge x \le \sigma_t < x+\delta x \wedge \theta_g^t \ge x+\Delta t \wedge \theta_g^t \ge x \wedge y+\Delta t \le \tau_{t+\Delta t} \wedge y \le \tau_t < y+\delta y \wedge \theta_a^t \ge y+\Delta t \wedge \theta_a^t \ge y).$$

Wir erhalten als analoge Abschätzungen:

$$(231.10)\qquad P(x_t=n \wedge x+\Delta t \le \sigma_{t+\Delta t} \wedge x \le \sigma_t < x+\delta x \wedge \theta_g^t \ge x+\Delta t \wedge \theta_g^t \ge x \wedge 0 \le \tau_{t+\Delta t} < y+\Delta t \wedge y \le \tau_t < y+\delta y \wedge \theta_a^t \ge y+\Delta t \wedge \theta_a^t \ge y)$$

$$\le P(x_t=n \wedge x+\Delta t \le \sigma_{t+\Delta t} \wedge x \le \sigma_t < x+\delta x \wedge \theta_g^t \ge x+\Delta t \wedge \theta_g^t \ge x \wedge y+\Delta t \le \theta_a^t < y+\delta y+\Delta t \wedge y \le \tau_t < y+\delta y \wedge \theta_a^t \ge y+\Delta t \wedge \theta_a^t \ge y),$$

$$(231.11a)\qquad P(x_t=n \wedge 0 \le \sigma_{t+\Delta t} < x+\Delta t \wedge x \le \sigma_t < x+\delta x \wedge \theta_g^t \ge x+\Delta t \wedge \theta_g^t \ge x \wedge 0 \le \tau_{t+\Delta t} < y+\Delta t \wedge y \le \tau_t < y+\delta y \wedge \theta_a^t \ge y+\Delta t \wedge \theta_a^t \ge y)$$

$$\le P(x_t=n \wedge x+\Delta t \le \theta_g^t < x+\delta x+\Delta t \wedge x \le \sigma_t < x+\delta x \wedge \theta_g^t \ge x+\Delta t \wedge \theta_g^t \ge x \wedge 0 \le \tau_{t+\Delta t} < y+\Delta t \wedge y \le \tau_t < y+\delta y \wedge \theta_a^t \ge y+\Delta t \wedge \theta_a^t \ge y),$$

$$(231.11b)\qquad P(x_t=n \wedge 0 \le \sigma_{t+\Delta t} < x+\Delta t \wedge x \le \sigma_t < x+\delta x \wedge \theta_g^t \ge x+\Delta t \wedge \theta_g^t \ge x \wedge 0 \le \tau_{t+\Delta t} < y+\Delta t \wedge y \le \tau_t < y+\delta y \wedge \theta_a^t \ge y+\Delta t \wedge \theta_a^t \ge y)$$

$$\le P(x_t=n \wedge 0 \le \sigma_{t+\Delta t} < x+\Delta t \wedge x \le \sigma_t < x+\delta x \wedge \theta_g^t \ge x+\Delta t \wedge \theta_g^t \ge x \wedge y+\Delta t \le \theta_a^t < y+\delta y+\Delta t \wedge y \le \tau_t < y+\delta y \wedge \theta_a^t \ge y+\Delta t \wedge \theta_a^t \ge y),$$

$$(231.11c)\qquad P(x_t=n \wedge 0 \le \sigma_{t+\Delta t} < x+\Delta t \wedge x \le \sigma_t < x+\delta x \wedge \theta_g^t \ge x+\Delta t \wedge \theta_g^t \ge x \wedge 0 \le \tau_{t+\Delta t} < y+\Delta t \wedge y \le \tau_t < y+\delta y \wedge \theta_a^t \ge y+\Delta t \wedge \theta_a^t \ge y)$$

$$\le P(x_t=n \wedge x+\Delta t \le \theta_g^t < x+\delta x+\Delta t \wedge x \le \sigma_t < x+\delta x \wedge \theta_g^t \ge x+\Delta t \wedge \theta_g^t \ge x \wedge y+\Delta t \le \theta_a^t < y+\delta y+\Delta t \wedge y \le \tau_t < y+\delta y \wedge \theta_a^t \ge y+\Delta t \wedge \theta_a^t \ge y).$$

Auf eine Begründung dieser Abschätzungen aus den Voraus-

setzungen des verbalen Modells kann hier verzichtet werden, da sie vollkommen analog zu der Diskussion verläuft, mit der wir die Relationen (231.8) und (231.9) motivierten.

Aus der Beziehung (231.7) erhalten wir mit Hilfe der soeben abgeschätzten Ergänzungswahrscheinlichkeiten:

$$
\begin{aligned}
(231.12)\quad & P(x_{t+\Delta t}=n \wedge x+\Delta t \leq \sigma_{t+\Delta t} < x+\delta x+\Delta t \wedge y+\Delta t \leq \tau_{t+\Delta t} < y+\delta y+\Delta t) \\
&= P(\theta_g^t \geq x+\Delta t \wedge \theta_g^t \geq x \wedge \theta_a^t \geq y+\Delta t \wedge \theta_a^t \geq y \\
&\quad \wedge x_t=n \wedge x \leq \sigma_t < x+\delta x \wedge y \leq \tau_t \wedge y+\delta y) \\
&+ P(\theta_g^t \geq x+\Delta t \wedge \theta_g^t \geq x \wedge \theta_a^t \geq y+\Delta t \wedge \theta_a^t \geq y \wedge 0 \leq \sigma_{t+\Delta t} < x+\Delta t \\
&\quad \wedge x_t=n \wedge x \leq \sigma_t < x+\delta x \wedge y \leq \tau_t < y+\delta y \wedge 0 \leq \tau_{t+\Delta t} < y+\Delta t) \\
&- P(\theta_g^t \geq x+\Delta t \wedge \theta_g^t \geq x \wedge \theta_a^t \geq y+\Delta t \wedge \theta_a^t \geq y \wedge 0 \leq \sigma_{t+\Delta t} < x+\Delta t \\
&\quad \wedge x_t=n \wedge x \leq \sigma_t < x+\delta x \wedge y \leq \tau_t < y+\delta y) \\
&- P(\theta_g^t \geq x+\Delta t \wedge \theta_g^t \geq x \wedge \theta_a^t \geq y+\Delta t \wedge \theta_a^t \geq y \wedge 0 \leq \tau_{t+\Delta t} < y+\Delta t \\
&\quad \wedge x_t=n \wedge x \leq \sigma_t < x+\delta x \wedge y \leq \tau_t < y+\delta y).
\end{aligned}
$$

Wir formen den ersten Term der rechten Seite von (231.12) in ein Produkt bedingter Wahrscheinlichkeiten um:

$$
\begin{aligned}
(231.13)\quad & P(\theta_g^t \geq x+\Delta t \wedge \theta_g^t \geq x \wedge \theta_a^t \geq y+\Delta t \wedge \theta_a^t \geq y \\
&\quad \wedge x_t=n \wedge x \leq \sigma_t < x+\delta x \wedge y \leq \tau_t < y+\delta y) \\
&= P(\theta_g^t \geq x+\Delta t / \theta_g^t \geq x \wedge \theta_a^t \geq y+\Delta t \wedge \theta_a^t \geq y \wedge x_t=n \wedge x \leq \sigma_t < x+\delta x \\
&\qquad \wedge y \leq \tau_t < y+\delta y) \\
&\cdot P(\theta_g^t \geq x / \theta_a^t \geq y+\Delta t \wedge \theta_a^t \geq y \wedge x_t=n \wedge x \leq \sigma_t < x+\delta x \wedge y \leq \tau_t < y+\delta y) \\
&\cdot P(\theta_a^t \geq y+\Delta t / \theta_a^t \geq y \wedge x_t=n \wedge x \leq \sigma_t < x+\delta x \wedge y \leq \tau_t < y+\delta y) \\
&\cdot P(\theta_a^t \geq y / x_t=n \wedge x \leq \sigma_t < x+\delta x \wedge y \leq \tau_t < y+\delta y) \\
&\cdot P(x_t=n \wedge x \leq \sigma_t < x+\delta x \wedge y \leq \tau_t < y+\delta y).
\end{aligned}
$$

Entsprechend den Voraussetzungen des verbalen Modells sind die Größen θ_g^t und θ_a^t von ihrer zeitlichen Lage, von der Besetzungszahl des Speichers und untereinander unabhängig; wir können bei beiden Größen den Index t unterdrücken. Die bedingten Wahrscheinlichkeiten vereinfachen sich wesentlich, da aus der Ungleichung $x \leq \sigma_t < x+\delta x$ die Ungleichung $\theta_g^t \geq x$, aus der Ungleichung $y \leq \tau_t < y+\delta y$ die Ungleichung $\theta_a^t \geq y$ folgt und somit $P(\theta_g^t \geq x / x \leq \sigma_t < x+\delta x) = P(\theta_a^t \geq y / y \leq \tau_t < y+\delta y) = 1$ gilt.

(231.14)
$$P(\theta_g^t \geq x+\Delta t \wedge \theta_g^t \geq x \wedge \theta_a^t \geq y+\Delta t \wedge \theta_a^t \geq y \wedge x_t=n \wedge x \leq \sigma_t < x+\delta x \wedge y \leq \tau_t < y+\delta y)$$

$$= P(\theta_g \geq x+\Delta t / \theta_g \geq x) \cdot P(\theta_a \geq y+\Delta t / \theta_a \geq y) \cdot P(x_t=n \wedge x \leq \sigma_t < x+\delta x \wedge y \leq \tau_t < y+\delta y).$$

Setzen wir auf der rechten Seite die Formeln (221.3a), (221.3b) und (221.4) ein, so erhalten wir, da $W_n(x,y,t)$ nach Voraussetzung in dem betrachteten Punkt (x,y,t) stetig ist, die Gleichung:

(231.15)
$$P(\theta_g^t \geq x+\Delta t \wedge \theta_g^t \geq x \wedge \theta_a^t \geq y+\Delta t \wedge \theta_a^t \geq y \wedge x_t=n \wedge x \leq \sigma_t < x+\delta x \wedge y \leq \tau_t < y+\delta y)$$

$$= (1 - \gamma(x).\Delta t + o(\Delta t))(1 - \alpha(y).\Delta t + o(\Delta t)).W_n(x,y,t)\delta x\delta y + o(\delta x \delta y).$$

Mit dem gleichen Verfahren berechnen wir die übrigen Terme von (231.12), wobei wir die Abschätzungen (231.9), (231.10) und (231.11) berücksichtigen. Als Resultat erhalten wir die Aussage, daß alle diese Terme von der Größenordnung $o(\delta x \delta y)$ sind und gegen 0 konvergieren,

wenn δx und δy gegen 0 streben. Die Relationen (231.6), (231.12) und (231.14) liefern dann das Endergebnis:

$$(231.16)\quad W_n(x+\Delta t, y+\Delta t, t+\Delta t) = 1 - (\gamma(x) + \alpha(y)).\Delta t \,.W_n(x,y,t) + o(\Delta t).$$

Der Grenzübergang "Δt gegen 0" führt zu der partiellen Differentialgleichung (231.4).

Die Herleitung der Differentialgleichung (231.2) für $V(x,t)$ verläuft ganz analog. Doch sind überall in den entsprechenden Betrachtungen die Ereignisse $\{\theta_a^t \geq y+\Delta t\}$ und $\{\theta_a^t \geq y\}$ durch die Ereignisse $\{\theta_a^t \geq x+\Delta t\}$ und $\{\theta_a^t \geq x\}$ zu ersetzen, da - man erinnere sich der Überlegungen, die zur Definition von $V(x,t)$ geführt haben, - $\sigma_t = \tau_t$ ist und in diesem Fall das Ereignis $\{x \leq \sigma_t < x+\delta x\}$ sowohl das Ereignis $\{\theta_g^t \geq x\}$ als auch das Ereignis $\{\theta_a^t \geq x\}$ zur Folge hat.

Für die Ableitung der die Funktion $U(x,t)$ kennzeichnenden Differentialgleichung müssen wir unsere Betrachtungen wieder ausführlicher gestalten. Es werde (x,t) so gewählt, daß in diesem Punkte $U(x,t)$ differenzierbar und somit natürlich auch stetig ist. Aus den Voraussetzungen über die Funktionenklasse $D^{(2)}$ folgt, daß $U(x,t)$ dann auch in $(x+\Delta t, t+\Delta t)$ stetig ist.
Wir untersuchen die Wahrscheinlichkeit:

$$(231.17)\quad P(x_{t+\Delta t}=0 \wedge x+\Delta t \leq \sigma_{t+\Delta t} < x+\delta x+\Delta t)$$
$$= P(x_{t+\Delta t}=0 \wedge x+\Delta t \leq \sigma_{t+\Delta t} < x+\delta x+\Delta t \wedge \Delta t \leq \chi_{t+\Delta t} \leq \sigma_{t+\Delta t})$$

$$+ P(x_{t+\Delta t}=0 \wedge x+\Delta t \leq \sigma_{t+\Delta t} < x+\delta x+\Delta t \wedge 0 \leq \chi_{t+\Delta t} < \Delta t)$$

Diese Gleichung folgt aus den Überlegungen, daß $\{\chi_{t+\Delta t} \geq 0\}$ das sichere Ereignis darstellt und daß - wir wissen es bereits aus der Betrachtung, die uns zur Definition der Funktion $U(x,t)$ geführt hat, - der Wert der Variablen $\chi_{t+\Delta t}$ nie den Wert der Variablen $\sigma_{t+\Delta t}$ überschreiten kann, wenn die Besetzungszahl $x_{t+\Delta t} = 0$ ist.

Den mittleren Term in (231.17) formen wir entsprechend der folgenden Gleichungskette um:

$$\begin{aligned}
&P(x_{t+\Delta t}=0 \wedge x+\Delta t \leq \sigma_{t+\Delta t} < x+\delta x+\Delta t \wedge \Delta t \leq \chi_{t+\Delta t} \leq \sigma_{t+\Delta t}) \\
&= P(x_{t+\Delta t}=0 \wedge x+\Delta t \leq \sigma_{t+\Delta t} \wedge x \leq \sigma_t < x+\delta x \wedge \Delta t \leq \chi_{t+\Delta t} \leq \sigma_{t+\Delta t}) \\
&= P(x_t=0 \wedge x+\Delta t \leq \sigma_{t+\Delta t} \wedge x \leq \sigma_t < x+\delta x \wedge \Delta t \leq \chi_{t+\Delta t} \leq \sigma_{t+\Delta t}) \\
&= P(x_t=0 \wedge x+\Delta t \leq \sigma_{t+\Delta t} \wedge x \leq \sigma_t < x+\delta x \wedge 0 \leq \chi_t \leq \sigma_t).
\end{aligned}$$

Die erste Gleichung dieser Kette folgt aus der Überlegung: Sind im Zeitpunkt $t+\Delta t$ mindestens $x+\Delta t$ (höchstens $x+\delta x+\Delta t$) Zeiteinheiten vergangen, so müssen im Zeitpunkt t mindestens x (höchstens $x+\delta x$) Zeiteinheiten vergangen sein, seit der Inputgenerator das letzte Signal ausgesandt hat.

Da überdies im Zeitpunkt $t+\Delta t$ mindestens Δt Zeiteinheiten vergangen sind, seit in der Arbeitszelle das letzte Signal gelöscht worden ist, wissen wir, daß innerhalb der Zeitspanne $[t,t+\Delta t]$ keine Änderung des Speicherinhaltes eingetreten ist. Auf Grund unserer Konvention über die Zustände des Systems ist im Zeitpunkt $t+\Delta t$ der Speicher genau dann leer, wenn er im Zeitpunkt t leer war. Damit sind die ersten beiden Gleichungen begründet.

Ist im Zeitpunkt t der Speicher leer und ist, vom Zeitpunkt $t+\Delta t$ her gesehen, das letzte Signal schon vor dem Zeitpunkt t ausgesandt worden, so folgt: Der Speicher ist während der Zeitspanne $[t,t+\Delta t]$ leer und die beiden Ungleichungen $\sigma_{t+\Delta t} \geq x_{t+\Delta t} \geq \Delta t$ und $\sigma_t \geq x_t \geq 0$ sind äquivalent; die letzte Gleichung ist ebenfalls bewiesen. Gehen wir mit diesem Ergebnis in die Gleichung (231.17) ein, und benutzen wir für den Term der linken Seite und den umgeformten Term der rechten Seite dieser Gleichung das Verfahren, das uns zur Differentialgleichung (231.4) führte, so erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
(231.18)\quad & U(x+\Delta t,t+\Delta t).\delta x + o(\delta x) \\
& = (1 - \gamma(x).\Delta t + o(\Delta t))(U(x,t).\delta x + o(\delta x)) \\
& + P(x_{t+\Delta t}=0 \wedge x+\Delta t \leq \sigma_{t+\Delta t} < x+\delta x+\Delta t \wedge 0 \leq x_{t+\Delta t} < \Delta t).
\end{aligned}
$$

Den unbekannten Term in (231.18) spalten wir auf:

$$
\begin{aligned}
& P(x_{t+\Delta t}=0 \wedge x+\Delta t \leq \sigma_{t+\Delta t} < x+\delta x+\Delta t \wedge 0 \leq x_{t+\Delta t} < \Delta t) \\
& = P(x_{t+\Delta t}=0 \wedge x+\Delta t \leq \sigma_{t+\Delta t} < x+\delta x+\Delta t \wedge 0 \leq x_{t+\Delta t} < \Delta t \wedge \sigma_t < x_t) \\
& + P(x_{t+\Delta t}=0 \wedge x+\Delta t \leq \sigma_{t+\Delta t} < x+\delta x+\Delta t \wedge 0 \leq x_{t+\Delta t} < \Delta t \wedge \sigma_t \geq x_t) \\
& = P(x_t=1 \wedge x+\Delta t \leq \sigma_{t+\Delta t} < x+\delta x+\Delta t \wedge 0 \leq x_{t+\Delta t} < \Delta t \wedge \sigma_t \geq x_t) \\
& + P(x_t=1 \wedge x+\Delta t \leq \sigma_{t+\Delta t} < x+\delta x+\Delta t \wedge 0 \leq x_{t+\Delta t} < \Delta t \wedge \sigma_t < x_t).
\end{aligned}
$$

Die letzte Gleichung begründen wir in der folgenden Weise: Ist zur Zeit $t+\Delta t$ der Speicher leer ($x_{t+\Delta t}=0$), hat in dem Intervall $[t,t+\Delta t]$ der Inputgenerator kein Signal ausgesandt ($x+\Delta t \leq \sigma_{t+\Delta t}$) und wurde in diesem Intervall

ein Signal gelöscht $(0 \leq \chi_{t+\Delta t} < \Delta t)$, so war zur Zeit t im Speicher ein Signal registriert. Eine analoge Überlegung zeigt, daß auch die Umkehrung gilt.

Wenden wir uns dem zweitletzten Term zu; gemäß früherer Überlegungen gilt:

$$P(x_t=1 \wedge x+\Delta t \leq \sigma_{t+\Delta t} < x+\delta x+\Delta t \wedge 0 \leq \chi_{t+\Delta t} < \Delta t \wedge \sigma_t < \chi_t)$$

$$= P(x_t=1 \wedge x+\Delta t \leq \sigma_{t+\Delta t} \wedge x \leq \sigma_t < x+\delta x \wedge 0 \leq \chi_{t+\Delta t} < \Delta t \wedge \sigma_t < \chi_t),$$

und wir schätzen ab:

$$P(x_t=1 \wedge x+\Delta t \leq \sigma_{t+\Delta t} \wedge x \leq \sigma_t < x+\delta x \wedge x \leq \theta_a^t < x+\Delta t \wedge \sigma_t < \chi_t)$$

$$\leq P(x_t=1 \wedge x+\Delta t \leq \sigma_{t+\Delta t} \wedge x \leq \sigma_t < x+\delta x \wedge 0 \leq \chi_{t+\Delta t} < \Delta t \wedge \sigma_t < \chi_t)$$

$$\leq P(x_t=1 \wedge x+\Delta t \leq \sigma_{t+\Delta t} \wedge x \leq \sigma_t < x+\delta x \wedge x \leq \theta_a^t < x+\delta x+\Delta t \wedge \sigma_t < \chi_t).$$

Zur Begründung der ersten Ungleichung überlegen wir uns: Liegt die Auswertungszeit θ_a^t des Signals, das zur Zeit t in der Arbeitszelle steht und in dem Intervall $(t-x-\delta x, t-x]$ in diese eingespeichert worden war, in dem Intervall $[x, x+\Delta t)$, so muß dieses Signal notwendig in dem Intervall $(t, t+\Delta t]$ gelöscht werden.

Gehen wir umgekehrt davon aus, daß die Auswertung des Signals, das zur Zeit t in der Arbeitszelle steht und in diese in dem Intervall $(t-x-\delta x, t-x]$ eingespeichert worden war, in dem Intervall $(t, t+\Delta t]$ zuende geht, so gilt notwendig: $x \leq \theta_a^t < x+\delta x+\Delta t$; die zweite Ungleichung ist bewiesen. Spalten wir den letzten Term der Ungleichung, mit der wir uns soeben beschäftigt haben entsprechend der Zerlegung $\{x \leq \theta_a^t < x+\delta x+\Delta t\} = \{x \leq \theta_a^t < x+\Delta t\} \cup \{x+\Delta t \leq \theta_a^t < x+\delta x+\Delta t\}$ auf, so erhalten wir, wenn wir auf die beiden Eckterme das Ver-

fahren anwenden, das uns zur Differentialgleichung (231.4) geführt hat, für den abzuschätzenden Term die Gestalt:

$$P(x_t=1 \wedge x+\Delta t \le \sigma_{t+\Delta t} \wedge x \le \sigma_t < x+\delta x \wedge 0 \le \chi_{t+\Delta t} < \Delta t \wedge \sigma_t < \chi_t)$$

$$= (\alpha(x).\Delta t + o(\Delta t)).V(x,t).\delta x + o(\delta x).$$

Die Formel (231.18) lautet nun:

(231.19)
$$U(x+\Delta t, t+\Delta t).\delta x + o(\delta x)$$

$$= \{(1 - \beta(x).\Delta t + o(\Delta t)).U(x,t) + (\alpha(x).\Delta t + o(\Delta t)).V(x,t)\}\delta$$

$$+ P(x_t=1 \wedge x+\Delta t \le \sigma_{t+\Delta t} \wedge x \le \sigma_t < x+\delta x \wedge 0 \le \chi_{t+\Delta t} < \Delta t \wedge \sigma_t \ge \chi_t).$$

In den folgenden Betrachtungen werde zunächst $x < t$ angenommen. Wir wählen eine Zerlegung $\mathfrak{z}^n(0,x;y_k, y)$ des Intervalles $[0,x]$ in Teilintervalle $[y_{k-1},y_k]$ der Länge Δy mit $n.\Delta y = x$ und spalten den in (231.19) noch unbekannten Term auf.

(231.20)
$$P(x_t=1 \wedge x+\Delta t \le \sigma_{t+\Delta t} \wedge x \le \sigma_t < x+\delta x \wedge 0 \le \chi_{t+\Delta t} < \Delta t \wedge \sigma_t \ge \chi_t)$$

$$= P(x_t=1 \wedge x+\Delta t \le \sigma_{t+\Delta t} \wedge x \le \sigma_t < x+\delta x \wedge 0 \le \chi_{t+\Delta t} < \Delta t \wedge x \le \chi_t \le \sigma_t)$$

$$+ \sum_{k=o}^{n-1} P(x_t=1 \wedge x \le \sigma_t < x+\delta x \wedge 0 \le \chi_{t+\Delta t} < \Delta t \wedge y_k \le \chi_t < y_k+\Delta y)$$

$$- \sum_{k=o}^{n-1} P(x_t=1 \wedge x \le \sigma_t < x+\delta x \wedge 0 \le \chi_{t+\Delta t} < \Delta t \wedge 0 \le \sigma_{t+\Delta t} < \Delta t \wedge y_k \le \chi_t < y_k+\Delta y).$$

Da $W_1(x,y,t)$ nach Voraussetzung auf jedem endlichen, abgeschlossenen Teilbereich von $x \ge 0, y \ge 0, t \ge 0$ beschränkt ist, erhalten wir für den ersten Term der rechten Seite von (231.20) die Abschätzung:

$$(231.21)\qquad P(x_t=1 \wedge x+\Delta t \le \sigma_{t+\Delta t} \wedge x \le \sigma_t < x+\delta x \wedge x \le \chi_t \le \sigma_t \wedge 0 \le \chi_{t+\Delta t} < \Delta t)$$

$$\le P(x_t=1 \wedge x \le \sigma_t < x+\delta x \wedge x \le \chi_t < x+\delta x \wedge \chi_t \le \sigma_t)$$

$$= \int_x^{x+\delta x} \int_x^{x+\delta x} W_1(\xi,\eta,t)\, d\eta\, d\xi = o(\delta x).$$

Da $\chi_t \le \sigma_t$ ist, dürfen wir in der Folge χ_t durch τ_t ersetzen. Dann gilt die folgende Abschätzung:

$$(231.22)\qquad \sum_{k=1}^{n-2}{}' P(x_t=1 \wedge x \le \sigma_t < x+\delta x \wedge y_k \le \tau_t < y_k+\Delta y \wedge y_k \le \theta_a^t \le y_k+\Delta t)$$

$$\le \sum_{k=o}^{n-1} P(x_t=1 \wedge x \le \sigma_t < x+\delta x \wedge y_k \le \tau_t < y_k+\Delta y \wedge 0 \le \chi_{t+\Delta t} < \Delta t)$$

$$= P(x_t=1 \wedge x \le \sigma_t < x+\delta x \wedge \tau_t < x \wedge 0 \le \chi_{t+\Delta t} < \Delta t)$$

$$\le \sum_{k=o}^{n-1}{}' P(x_t=1 \wedge x \le \sigma_t < x+\delta x \wedge y_k \le \tau_t < y_k+\Delta y \wedge y_k \le \theta_a^t < y_k+\Delta t)$$

$$+ \sum_{k=o}^{n-1}{}' P(x_t=1 \wedge x \le \sigma_t < x+\delta x \wedge y_k \le \tau_t < y_k+\Delta y \wedge y_k+\Delta t \le \theta_a^t < y_k+\Delta t+\Delta y)$$

Wir schreiben die einzelnen Wahrscheinlichkeiten in bedingte Wahrscheinlichkeiten um, setzen deren bekannte Formeln ein und wenden darauf den Mittelwertsatz der Integralrechnung an:

$$(231.23)\qquad \left\{ \sum_{k=1}^{n-2}{}' \frac{a(\eta_k')}{1 - A(y_k)} W_1(\xi'', \eta_k'', t).\Delta y \right\}.\delta x.\Delta t$$

$$\le P(x_t=1 \wedge x \le \sigma_t < x+\delta x \wedge \tau_t < x \wedge 0 \le \chi_{t+\Delta t} < \Delta t)$$

$$\le \left\{ \sum_{k=o}^{n-2}{}' \frac{a(\eta_k')}{1 - A(y_k)} W_1(\xi'', \eta_k'', t).\Delta y \right\}.\delta x.\Delta t + \frac{a(\eta_{n-1}')}{1-A(y_{n-1})} M.\Delta y.\delta x.\Delta t$$

$$+ \left\{ \sum_{k=o}^{n-1}{}' \frac{a(\eta_k^{*}+\Delta t)}{1 - A(y_k+\Delta t)} W_1(\xi'', \eta_k'', t).(\Delta y)^2 \right\}\delta x.\Delta t$$

Dabei gelten folgende Relationen:

$x \leq \xi'' < x+\delta x$ und für $0 \leq k \leq n-1$

$y_k \leq \eta_k' < y_k+\Delta t, \quad y_k+\Delta t \leq \eta_k^{*}+\Delta t < y_k+\Delta y+\Delta t, \quad y_k \leq \eta_k'' < y_k+\Delta y.$

Die Größe M ist eine obere Schranke für $W_1(x,y,t)$ auf dem endlichen, abgeschlossenen Bereich, der alle in oben stehender Abschätzung vorkommende Stellen (ξ'', η_k'', t) enthält.

Nach Voraussetzung sind $a(y)$ und $1/(1-A(y))$ auf jedem abgeschlossenen Intervall des Bereiches $y \geq 0$ gleichmäßig stetig und beschränkt. Es gibt daher zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Schranke $\delta(\varepsilon)$ derart, daß für alle $\Delta t, \Delta y < \delta(\varepsilon)$ und alle k mit $0 \leq k \leq n-2$ die Abschätzungen

$$\left| \frac{a(\eta_k')}{1 - A(y_k)} - \alpha(\eta_k'') \right| < \varepsilon \quad \text{und} \quad \left| \frac{a(\eta_k^{*}+\Delta t)}{1 - A(y_k+\Delta t)} - \alpha(\eta_k''+\Delta t) \right| < \varepsilon$$

erfüllt sind.

Wir geben uns ein $\varepsilon > 0$ beliebig vor und wählen für die folgenden Betrachtungen $\Delta y < \delta(\varepsilon)$ und $\Delta t < \delta(\varepsilon)$.

(231.24)
$$\left\{ \sum_{k=1}^{n-2} \alpha(\eta_k'') . W_1(\xi'', \eta_k'', t) . \Delta y \right\} . \delta x . \Delta t + R_1 . \delta x . \Delta t$$

$$\leq P(x_t = 1 \wedge x \leq \sigma_t < x+\delta x \wedge \tau_t < x \wedge 0 \leq \chi_{t+\Delta t} < \Delta t)$$

$$\leq \left\{ \sum_{k=0}^{n-2} \alpha(\eta_k'') . W_1(\xi'', \eta_k'', t) . \Delta y \right\} . \delta x . \Delta t + R_2 . \delta x . \Delta t$$

$$+ \left\{ \sum_{k=0}^{n-2} \alpha(\eta_k''+\Delta t) . W_1(\xi'', \eta_k'', t) . \Delta y \right\} . \Delta y . \delta x . \Delta t + R_3 . \Delta y . \delta x . \Delta t$$

$$+ N . M . \Delta y . \delta x . \Delta t + N . M . \Delta y . \Delta y . \delta x . \Delta t.$$

Die Größe N ist eine obere Schranke für

$\frac{a(\eta_{n-1}')}{1 - A(y_{n-1})}$ und $\frac{a(\eta_{n-1}^{*}+\Delta t)}{1 - A(y_{n-1}+\Delta t)}$ auf dem Intervall

$\left[x-\delta(\varepsilon), x+\delta(\varepsilon)\right]$; R_1, R_2 und R_3 sind Korrekturglieder, die alle dem Betrage nach kleiner als die folgende Summe sind: $\varepsilon \left\{ \sum_{k=o}^{n-2}{}' W_1(\xi'', \eta_k'', t).\Delta y \right\}$.

Nach Voraussetzung gilt $x>0$, $t>0$ und $x<t$. Da für $0 \leq k \leq n-2$ η_k'' kleiner als x ist, ist $W_1(x,y,t)$ aus $D^{(3)}$ sicher in dem Punkt (x,η_k'',t) stetig. Dividieren wir jetzt die ganze Ungleichung (231.24) durch δx und lassen wir anschließend δx gegen 0 konvergieren, so strebt $W_1(\xi'', \eta_k'', t)$ gegen $W_1(x, \eta_k'', t)$. Auf Grund der Abschätzung, die wir für die Korrekturglieder kennen, schliessen wir, daß alle Häufungspunkte, sofern überhaupt mehrere existieren, von R_1, R_2, R_3 für "δx gegen 0" dem Betrage nach durch die Summe $\varepsilon \sum_{k=o}^{n-2}{}' W_1(x, \eta_k'', t).\Delta y$ abgeschätzt werden können.

Dann liegen alle Häufungspunkte von

$$(1/\delta x).P(x_t=1 \wedge x \leq \sigma_t < x+\delta x \wedge \tau_t < x \wedge 0 \leq \chi_{t+\Delta t} < \Delta t)$$

für "δx gegen 0" innerhalb der folgenden Schranken:

$$\left\{ \sum_{k=1}^{n-2} \alpha(\eta_k'').W_1(x,\eta_k'',t).\Delta y \; - \; \varepsilon \sum_{k=o}^{n-2}{}' W_1(x,\eta_k'',t).\Delta y \right\}.\Delta t \,,$$

$$\left\{ \sum_{k=o}^{n-2} \alpha(\eta_k'').W_1(x,\eta_k'',t).\Delta y \; + \; \varepsilon \sum_{k=o}^{n-2}{}' W_1(x,\eta_k'',t).\Delta y \right.$$

$$+ \sum_{k=o}^{n-2} \alpha(\eta_k''+\Delta t).W_1(x,\eta_k'',t).\Delta y.\Delta y \; + \; \varepsilon \sum_{k=o}^{n-2}{}' W_1(x,\eta_k'',t).\Delta y.\Delta y$$

$$\left. + \; N.M.\Delta y \; + \; N.M.\Delta y.\Delta y \right\}.\Delta t.$$

Von dem Grenzübergang "Δy gegen 0" mit $n.\Delta y = x$ werden die Häufungspunkte der abzuschätzenden Größe nicht berührt. Die oben angegebenen Schranken konvergieren gegen

entsprechende Integrale, da $\alpha(y)$ und $W_1(x,y,t)$ über dem Intervall $[0,x]$ integrierbar sind.

$$(231.25)\quad \left\{\int_0^x W_1(x,y,t)\alpha(y)\,dy \;-\; \varepsilon\int_0^x W_1(x,y,t)\,dy\right\}.\Delta t$$

$$\leq \liminf_{\delta x \longrightarrow 0} (1/\delta x).P(x_t=1 \wedge x \leq \sigma_t < x+\delta x \wedge \tau_t < x \wedge 0 \leq \chi_{t+\Delta t} < \Delta t)$$

$$\leq \limsup_{\delta x \longrightarrow 0} (1/\delta x).P(x_t=1 \wedge x \leq \sigma_t < x+\delta x \wedge \tau_t < x \wedge 0 \leq \chi_{t+\Delta t} < \Delta t)$$

$$\leq \left\{\int_0^x W_1(x,y,t)\alpha(y)\,dy \;+\; \varepsilon\int_0^x W_1(x,y,t)\,dy\right\}.\Delta t.$$

Unter Zuhilfenahme der Verteilungsfunktion und Dichte der Variablen ϑ_g^t zeigt man in einer ganz analogen Abschätzung daß für "δx gegen 0" die Häufungspunkte der Größe

$(1/\delta x).P(x_t=1 \wedge x \leq \sigma_t < x+\delta x \wedge \tau_t < x \wedge 0 \leq \sigma_{t+\Delta t} < \Delta t \wedge 0 \leq \chi_{t+\Delta t} <$

zwischen zwei Schranken $\Delta t.\Delta t.C_1$ und $\Delta t.\Delta t,C_2$ liegen; C_1 und C_2 sind für "Δt gegen 0" von der Größenordnung $O(1)$ und können darüber hinaus noch von x und t abhängen.

Aus den Gleichungen (231.19), (231.20) und (231.21) erkennen wir, daß

$U(x+\Delta t,t+\Delta t)-(1-\gamma(x)\Delta t+o(\Delta t))U(x,t)-(\alpha(x)\Delta t+o(\Delta t))V(x,t)$

zwischen

$\left\{\int_0^x W_1(x,y,t)\alpha(y)\,dy \;-\; \varepsilon\int_0^x W_1(x,y,t)\,dy\right\}.\Delta t \;+\; o(\Delta t)$ und

$\left\{\int_0^x W_1(x,y,t)\alpha(y)\,dy \;+\; \varepsilon\int_0^x W_1(x,y,t)\,dy\right\}.\Delta t \;+\; o(\Delta t)$

liegen muß. Dividieren wir die entsprechende Ungleichung durch Δt und lassen wir ε und $\Delta t < \delta(\varepsilon)$ gegen 0 gehen, so erhalten wir auf Grund der Differenzierbarkeit von $U(x,t)$ in dem gewählten Punkt die Differentialgleichung

(231.1).

Für $x > t$ haben wir zu beachten, daß $W_1(x,y,t)$ bei festem x an der Stelle $y = t$ unstetig sein kann. Wir schneiden diese Stelle zusammen mit einer kleinen Umgebung heraus und schätzen auf ihr die Funktion $W_1(x,y,t)$ durch eine Konstante M ab, was nach Voraussetzung möglich ist. Da diese Umgebung beliebig klein wählbar ist, spielt diese Modifikation gegenüber dem oben angezeigten Beweis keine wesentliche Rolle; wir erhalten auch hier die Differentialgleichung (231.1).

Dieses Verfahren mußte so ausführlich dargestellt werden, da wir bei der Herleitung weiterer, im Verlaufe dieser Arbeit auftretender Gleichungen auf diese Beweistechnik verweisen wollen.

232. DIE ANFANGSWERTE.

Die abgeleiteten Differentialgleichungen (231.1), (231.2), (231.3a), (231.4) und (231.5a) sind lineare, inhomogene, partielle Differentialgleichungen erster Ordnung. Aus der Theorie dieser Differentialgleichungen [5] entnehmen wir, daß ohne zusätzliche Angaben die Lösungen dieser Gleichungen noch nicht eindeutig bestimmt werden können. Da wir aber im Hinblick auf unser verbales Modell nur an eindeutigen Lösungen interessiert sind, müssen wir nach zusätzlichen Bedingungen suchen.

Da sind zunächst die Informationen über die Systemzustände im Zeitpunkt 0. Wir beschränken uns in ihrer Wahl auf eine mathematische Form, die den bisher abgeleiteten Gleichungen angepaßt ist.

Vor. 1 FÜR DIE WAHRSCHEINLICHKEIT $P(x_0=0 \wedge \sigma_0 < x)$ GIBT ES EINE DICHTE $U_0(x)$ DERART, DASS SIE FÜR ALLE $x \geq 0$ STETIG FÜR $x > 0$ MINDESTENS EINMAL STETIG DIFFERENZIERBAR IST UND DASS

$$P(x_0=0 \wedge \sigma_0 < x) = \int_0^x U_0(\xi)\, d\xi \quad \text{GILT.}$$

Vor. 2 FÜR DIE WAHRSCHEINLICHKEIT $P(x_0=1 \wedge \sigma_0 < x \wedge \sigma_0 < \chi_0)$ GIBT ES EINE DICHTE $V_0(x)$ DERART, DASS SIE FÜR ALLE $x \geq 0$ STETIG, FÜR $x > 0$ MINDESTENS EINMAL STETIG DIFFERENZIERBAR IST UND DASS

$$P(x_0=1 \wedge \sigma_0 < x \wedge \sigma_0 < \chi_0) = \int_0^x V_0(\xi)\, d\xi \quad \text{GILT.}$$

Vor. 3 FÜR DIE WAHRSCHEINLICHKEIT $P(x_0=1 \wedge \sigma_0 < x \wedge \chi_0 < y \wedge \chi_0 \leq \sigma_0)$ GIBT ES EINE DICHTE $W_{01}(x,y)$, DIE FÜR $x \geq 0, y \geq 0$, $x \neq y$ STETIG, FÜR $x > 0, y > 0, x \neq y$ MINDESTENS EINMAL STETIG DIFFERENZIERBAR, AUF JEDEM ENDLICHEN, ABGESCHLOSSENEN BEREICH VON $x \geq 0, y \geq 0$ BESCHRÄNKT IST UND FÜR ALLE $y \geq x > 0$ IDENTISCH VERSCHWINDET UND FÜR DIE

$$P(x_0=1 \wedge \sigma_0 < x \wedge \chi_0 < y \wedge \chi_0 \leq \sigma_0) = \int_0^x \int_0^y W_{01}(\xi,\eta)\, d\eta\, d\xi \quad \text{GILT.}$$

Vor. 4 FÜR DIE WAHRSCHEINLICHKEIT $P(x_0=n \wedge \sigma_0 < x \wedge \chi_0 < y)$ GIBT ES EINE DICHTE $W_{on}(x,y)$, DIE FÜR $1 < n \leq N$, FÜR $x \geq 0$, $y \geq 0, x \neq y$ STETIG, FÜR $x > 0, y > 0, x \neq y$ MINDESTENS EINMAL STETIG DIFFERENZIERBAR, AUF JEDEM ENDLICHEN, ABGESCHLOSSENEN BEREICH VON $x \geq 0, y \geq 0$ BESCHRÄNKT IST, FÜR $n = N$ IN DEM BEREICH $x \geq y > 0$ IDENTISCH VERSCHWINDET UND FÜR DIE

$$P(x_0=n \wedge \sigma_0 < x \wedge \chi_0 < y) = \int_0^x \int_0^y W_{on}(\xi,\eta)\, d\eta\, d\xi \quad \text{GILT.}$$

Vor. 5 SCHLIEßLICH GELTE:

$U_o(x)$, $V_o(x) \geq 0$ FÜR $x \geq 0$, $W_{on}(x,y) \geq 0$ FÜR $1 \leq n \leq N$ UND $x \geq 0$, $y \geq 0$ SOWIE

$$\int_0^\infty U_o(x)\,dx + \int_0^\infty V_o(x)\,dx + \sum_{n=1}^{N} \int_0^\infty \int_0^\infty W_{on}(x,y)\,dx\,dy = 1.$$

Wir werden so auf ein Anfangswertproblem geführt, wobei die bekannten Funktionen $U_o(x)$, $V_o(x)$ und $W_{on}(x,y)$ die Anfangswerte auf $x \geq 0, t = 0$ bzw. $x \geq 0, y \geq 0, t = 0$ darstellen, an die sich die für $x > 0$ und $t > 0$ bzw. $x > 0$, $y > 0$ und $t > 0$ zu bestimmenden Lösungen der im vorangegangenen Abschnitt abgeleiteten Differentialgleichungen in $t = 0$ zumindest stetig anschließen sollen.

Dieses Anfangswertproblem lösen wir in Übereinstimmung mit der allgemeinen Theorie partieller Differentialgleichungen so, daß wir an die Anfangswerte die Charakteristiken der betreffenden Differentialgleichungen anhängen. Untersuchen wir diese Charakteristiken, so stellen wir fest, daß die entsprechenden Grundcharakteristiken - wir verstehen darunter die Projektionen der Charakteristiken auf die (x,t)-Ebene im Falle der Differentialgleichungen (231.1) und (231.2) bzw. die Projektionen auf den (x,y,t)-Raum im Falle der restlichen Differentialgleichungen - alle parallel zu der Flächendiagonalen $x = t$ in den ersten beiden Fällen bzw. parallel zur Raumdiagonalen $x = y = t$ in den übrigen Fällen verlaufen. Daraus erkennen wir sofort, daß wir zwar imstande sind für die durch $0 \leq x \leq t$ bzw. $0 \leq x \leq t$ und $0 \leq y \leq t$, die gleichzeitig erfüllt sein müssen, gekennzeichneten Bereiche die Integralflächen eindeutig so zu bestimmen, daß sie sich stetig an die Anfangswerte für $t = 0$

anschließen, daß aber für solche Stellen (x,t) bzw. (x,y,t), die zwar in den Bereichen $x \geq 0$, $t \geq 0$ bzw. $x \geq 0$, $y \geq 0$, $t \geq 0$, jedoch nicht in den angezeigten Teilbereichen liegen, noch keine eindeutige Integralfläche angegeben werden kann. Es ist daher eine mathematische Notwendigkeit auch auf den Rändern $t \geq 0$, $x = 0$ bzw. $x \geq 0$, $t \geq 0$, $y = 0$ und $y \geq 0$, $t \geq 0$, $x = 0$ Anfangswerte vorzugeben.

Wir definieren zwei Funktionenklassen:

Def. 9 EINE FUNKTION $f(t)$ GEHÖRT ZUR FUNKTIONENKLASSE $C^1(0,\infty)$ WENN $f(t)$ FÜR ALLE $t > 0$ WENIGSTENS EINMAL STETIG DIFFERENZIERBAR UND AUF JEDEM ENDLICHEN, ABGESCHLOSSENEN BEREICH AUS $t \geq 0$ BESCHRÄNKT IST.

Def. 10 EINE FUNKTION $f(z,t)$ GEHÖRT ZUR KLASSE $C^1(R_{z,t})$, WENN $f(z,t)$ FÜR ALLE $z > 0$ UND ALLE $t > 0$ MINDESTENS EINMAL STETIG DIFFERENZIERBAR UND AUF JEDEM ENDLICHEN, ABGESCHLOSSENEN TEILBEREICH VON $z \geq 0$, $t \geq 0$ BESCHRÄNKT IST

Als zusätzliche Anfangswerte für die Differentialgleichungen (231.1) und (231.2) geben wir zwei Funktionen $U^x(t)$ und $V^x(t)$ aus $C^1(0,\infty)$ vor. Für die restlichen Differentialgleichungen wählen wir als Anfangswerte Funktionen $W_n^x(y,t)$ auf dem Rand $x = 0$, $t \geq 0$, $y \geq 0$ und Funktionen $W_n^y(x,t)$ auf dem Rand $y = 0$, $t \geq 0$, $x \geq 0$ aus den Klassen $C^1(R_{y,t})$ bzw. $C^1(R_{x,t})$. Es ist dabei zu beachten, daß wir für $n=1$ nur $W_1^y(x,t)$ und für $n=N$ nur $W_N^x(y,t)$ vorgeben dürfen, da die entsprechenden Differentialgleichungen (231.3a) und (231.5a) nur für die Bereiche $x > y > 0$, $t > 0$ und $y > x > 0$, $t > 0$ gelten.

Hängen wir auch an diese Anfangswerte die Charakteristiken an, so haben wir eindeutig für jede Stelle (x,t) mit $x \geq 0$, $t \geq 0$ Integralflächen $U(x,t)$ und $V(x,t)$ aus der Klasse $D^{(2)}$ und eindeutig für jede Stelle (x,y,t) mit $x \geq 0$, $y \geq 0$, $t \geq 0$, von welchen eventuell die Stellen mit $x=y$ und $x > t$ ausgenommen sein können, Integralflächen $W_n(x,y,t)$ aus der Klasse $D^{(3)}$ konstruiert. Dennoch ist die Lösung unseres eigentlichen Problems noch nicht eindeutig bestimmt, da innerhalb der Klassen $C^1(0,\infty)$, $C^1(R_{x,t})$ und $C^1(R_{y,t})$ die Funktionen $U^x(t)$, $V^x(t)$, $W_n^x(y,t)$ und $W_n^y(x,t)$ noch frei wählbar sind. Es besteht außerdem die Gefahr, daß die bei irgendeiner zulässigen Wahl dieser Anfangswerte konstruierten Funktionen $U(x,t)$, $V(x,t)$ und $W_n(x,y,t)$ keine Wahrscheinlichkeitsdichten mehr sind. Wir müssen daher unser verbales Modell auf weitere Bedingungen hin untersuchen, Bedingungen, welche die Anfangswerte $U^x(t)$, $V^x(t)$, $W_n^x(y,t)$ und $W_n^y(x,t)$ und somit die Lösungen unseres eigentlichen Problems fixieren.

Wir geben uns irgendwelche zuläßige Anfangswerte vor und konstruieren die Lösungen der Differentialgleichungen (231.1-5). Von diesen Lösungen nehmen wir an, es seien die gesuchten Dichten. Nutzen wir jetzt aus, daß sich diese Lösungen stetig an die Anfangswerte anschließen und verwenden wir die Aussagen des verbalen Modells über die Eigenschaften dieser Dichten auf den berandenden Flächen und Achsen, so gewinnen wir eine Reihe von Gleichungen zwischen den vorgegebenen Anfangswerten $U^x(t)$, $V^x(t)$, $W_n^x(y,t)$ und $W_n^y(x,t)$ und den durch sie bedingten Lösungen. Diese Gleichungen lauten:

(232.1) $U^x(t) = 0$ für $t > 0$,

(232.2) $V^x(t) = \int_0^\infty U(x,t)\gamma(x)\,dx$ für $t > 0$,

(232.3) $W_2^x(y,t) = V(y,t)\gamma(y) + \int_0^\infty W_1(x,y,t)\gamma(x)\,dx$ für $t > 0$, $y > 0$,

(232.4) $W_n^x(y,t) = \int_0^\infty W_{n-1}(x,y,t)\gamma(x)\,dx \quad (2 < n < N)$ für $t > 0$, $y > 0$,

(232.5) $W_N^x(y,t) = \int_0^\infty (W_N(x,y,t) + W_{N-1}(x,y,t))\gamma(x)\,dx$ für $t > 0$, $y > 0$,

(232.6) $W_n^y(x,t) = \int_0^\infty W_{n+1}(x,y,t)\alpha(y)\,dy \quad (1 \leq n < N)$ für $t > 0$, $x > 0$.

Ehe wir uns weiter mit dem durch die Gleichungen (231.1-5), (232.1-6) und die Voraussetzungen 1-5 gegebenen mathematischen Problem befassen, wollen wir stellvertretend für alle zuletzt angeführten Gleichungen die ersten beiden aus den Angaben des verbalen Modells herleiten.

Wir beginnen mit der Funktion $U(x,t)$ und betrachten:

(232.7)
$$P(x_t = 0 \wedge 0 \leq \sigma_t < \delta x) = \int_0^{\delta x} U(x,t)\,dx = U^x(t).\delta x + o(\delta x).$$

Bezeichnen wir abweichend von der früheren Definition mit $\{0 \leq \theta_a < \delta x\}$ das Ereignis, das dann eintritt, wenn das Signal, das zum Zeitpunkt $t - \sigma_t$ ausgesandt wurde, eine Auswertungsdauer besitzt, die kleiner als δx ist, so gilt:

(232.8) $P(x_t = 0 \wedge 0 \leq \sigma_t < \delta x) \leq P(0 \leq \sigma_t < \delta x \wedge 0 \leq \theta_a < \delta x)$.

Auf Grund der Modellvoraussetzungen sind die beiden rechts stehenden Ereignisse unabhängig, die Wahrscheinlichkeit auf der rechten Seite darf in ein Produkt umgeschrieben werden,

dessen Wert wir ohne Mühe als $o(\delta x)$ errechnen können:

(232.9) $$P(x_t=0 \wedge 0 \leq \sigma_t < \delta x) = o(\delta x).$$

Vergleichen wir dieses Ergebnis mit der Gleichung (232.8), so folgt daraus unmittelbar die Gleichung $U^x(t) = 0$.

Wir wenden uns der Funktion $V(x,t)$ zu und betrachten für $t > 0$

(232.10) $$P(x_{t+\delta x}=1 \wedge 0 \leq \sigma_{t+\delta x} < \delta x \wedge \sigma_{t+\delta x} < \chi_{t+\delta x}) = V^x(t+\delta x).\delta x + o(\delta x).$$

Andererseits gilt

(232.11) $$P(x_{t+\delta x}=1 \wedge 0 \leq \sigma_{t+\delta x} < \delta x \wedge \sigma_{t+\delta x} < \chi_{t+\delta x})$$

$$= P(x_{t+\delta x}=1 \wedge 0 \leq \sigma_{t+\delta x} < \delta x \wedge \sigma_{t+\delta x} < \chi_{t+\delta x} \wedge \sigma_t \geq S)$$

$$+ P(x_{t+\delta x}=1 \wedge 0 \leq \sigma_{t+\delta x} < \delta x \wedge \sigma_{t+\delta x} < \chi_{t+\delta x} \wedge 0 \leq \sigma_t < S)$$

für jedes positive S.

Für den ersten Summanden in (232.11) erhalten wir die folgende Abschätzung:

(232.12) $$P(x_{t+\delta x}=1 \wedge 0 \leq \sigma_{t+\delta x} < \delta x \wedge \sigma_{t+\delta x} < \chi_{t+\delta x} \wedge \sigma_t \geq S)$$

$$\leq P(x_{t+\delta x}=1 \wedge 0 \leq \sigma_{t+\delta x} < \delta x \wedge \sigma_{t+\delta x} < \chi_{t+\delta x} \wedge \theta_g^t \geq S)$$

$$= P(\theta_g \geq S).(V^x(t+\delta x).\delta x + o(\delta x)),$$

da θ_g wiederum nicht von seiner zeitlichen Lage abhängt. Aus dieser Abschätzung erkennen wir, daß für "δx gegen 0" alle Häufungspunkte von

$(1/\delta x).P(x_{t+\delta x}=1 \wedge 0 \leq \sigma_{t+\delta x} < \delta x \wedge \sigma_{t+\delta x} < \chi_{t+\delta x} \wedge \sigma_t \geq S)$

zwischen den Grenzen 0 und $(1 - G(S)).V^x(t)$ liegen.

Auf den zweiten Summanden in (232.11) wenden wir das Ver-

fahren an, das uns die Differentialgleichung für $U(x,t)$ begründen half und stellen fest, daß alle Häufungspunkte von

$$(1/\delta x).P(x_{t+\delta x}=1 \wedge 0 \leq \sigma_{t+\delta x} < \delta x \wedge \sigma_{t+\delta x} < \chi_{t+\delta x} \wedge 0 \leq \sigma_t < S)$$

für "δx gegen 0" zwischen den Schranken

$$-\varepsilon + \int_0^S U(x,t)\gamma(x)\,dx \quad \text{und} \quad +\varepsilon + \int_0^S U(x,t)\gamma(x)\,dx$$

liegen. ε stellt eine beliebig vorgebbare, positive Größe dar.

Zusammen mit den Relationen (232.10-12) erhalten wir für den Grenzübergang "ε gegen 0" die Ungleichung:

$$(232.13)\quad 0 \leq V^x(t) - \int_0^S U(x,t)\gamma(x)\,dx \leq (1-G(S)).V^x(t).$$

Der Grenzübergang "S gegen $+\infty$" liefert das Ergebnis (232.2).

Der Nachweis der Relationen (232.3-6) wird in gleicher Weise erbracht.

233. DIE MODIFIZIERTEN GLEICHUNGEN.

Wir definieren die Funktionen $u(x,t)$, $v(x,t)$, $w_n(x,y,t)$, $u_o(x)$, $v_o(x)$, $w_{on}(x,y,t)$ usw. durch die folgenden Gleichungen:

$$U(x,t) = u(x,t).\exp\Big\{-\int_0^x \gamma(\xi)\,d\xi\Big\},$$

$$V(x,t) = v(x,t).\exp\Big\{-\int_0^x \gamma(\xi)\,d\xi - \int_0^x \alpha(\eta)\,d\eta\Big\},$$

$$W_n(x,y,t) = w_n(x,y,t).\exp\Big\{-\int_0^x \gamma(\xi)\,d\xi - \int_0^y \alpha(\eta)\,d\eta\Big\}.$$

Dabei sind $U(x,t)$ und $V(x,t)$ genau dann aus $D^{(2)}$, wenn $u(x,t)$ und $v(x,t)$ in dieser Klasse liegen und $W_n(x,y,t) \in D^{(3)}$ genau dann, wenn $w_n(x,y,t) \in D^{(3)}$.

$$U_o(x) = u_o(x).\exp\left\{-\int_o^x \gamma(\xi)\,d\xi\right\},$$

$$V_o(x) = v_o(x).\exp\left\{-\int_o^x \gamma(\xi)\,d\xi - \int_o^x \alpha(\eta)\,d\eta\right\},$$

$$W_{on}(x,y) = w_{on}(x,y).\exp\left\{-\int_o^x \gamma(\xi)\,d\xi - \int_o^y \alpha(\eta)\,d\eta\right\},$$

wobei sich die Eigenschaften von $U_o(x)$, $V_o(x)$, $W_{on}(x,y)$ auf $u_o(x)$, $v_o(x)$ und $w_{on}(x,y)$ und umgekehrt übertragen.

Schließlich setzen wir noch

$$U^x(t) = u^x(t),\ V^x(t) = v^x(t),$$

$$W_n^x(y,t) = w_n^x(y,t).\exp\left\{-\int_o^y \alpha(\eta)\,d\eta\right\} \quad \text{für } 2 \le n \le N,$$

$$W_n^y(x,t) = w_n^y(x,t).\exp\left\{-\int_o^x \gamma(\xi)\,d\xi\right\} \quad \text{für } 1 \le n < N,$$

$$0 = w_n^x(y,t) \quad \text{für } n = 1 \text{ und}$$

$$0 = w_n^y(x,t) \quad \text{für } n = N.$$

Damit erhalten wir eine äquivalente Formulierung unseres mathematischen Modells:

Gegeben sind die Funktionen $u_o(x)$, $v_o(x)$ und $w_{on}(x,y)$, die über die oben angegebenen Definitionen als Anfangswerte den Voraussetzungen 1-5 genügen.

Gesucht sind die Funktionen $u(x,t)$, $v(x,t)$ $D^{(2)}$ und $w_n(x,y,t)$ $D^{(3)}$ sowie deren Randwerte $u^x(t)$, $v^x(t)$ $C^1(o,\infty)$, $w_n^x(y,t)$ $C^1(R_{y,t})$ und $w_n^y(x,t)$ $C^1(R_{x,t})$, sodaß die folgenden Gleichungen erfüllt sind und alle Funktionen verschwinden, sobald eines ihrer Argumente negativ wird:

$$(233.1a)\quad \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\, u(x,t) = a(x).v(x,t) + \int_0^\infty w_1(x,y,t)\alpha(y)\, dy,$$

$$(233.1b)\quad \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\, v(x,t) = 0,$$

$$(233.1c)\quad \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\, w_n(x,y,t) = 0 \quad (1 \leq n \leq N),$$

$$(233.2a)\quad u^x(t) = 0 \qquad \text{für } t > 0$$

$$(233.2b)\quad v^x(t) = \int_0^\infty u(x,t)g(x)\, dx \qquad \text{für } t > 0$$

$$(233.2c)\quad w_1^x(y,t) = 0 \qquad \text{für } t > 0,\ y > 0$$

$$(233.2d)\quad w_2^x(y,t) = v(y,t).g(y) + \int_0^\infty w_1(x,y,t)g(x)\, dx \qquad \text{für } t > 0,\ y > 0$$

$$(233.2e)\quad w_n^x(y,t) = \int_0^\infty w_{n-1}(x,y,t)g(x)\, dx \quad (2 < n \leq N) \qquad \text{für } t > 0,\ y > 0$$

$$(233.2f)\quad w_N^x(y,t) = \int_0^\infty (w_N(x,y,t) + w_{N-1}(x,y,t))g(x)\, dx \qquad \text{für } t > 0,\ y > 0$$

$$(233.2g)\quad w_n^y(x,t) = \int_0^\infty w_{n+1}(x,y,t)a(y)\, dy \quad (1 \leq n < N) \qquad \text{für } t > 0,\ x > 0$$

$$(233.2h)\quad w_N^y(x,t) = 0 \qquad \text{für } t > 0,\ x > 0$$

(233.3a) $u(x,t) \geq 0$, $v(x,t) \geq 0$, $w_n(x,y,t) \geq 0$ und

(233.3b)
$$\int_0^\infty u(x,t).\exp\left\{-\int_0^x \delta(\xi)\, d\xi\right\} dx$$
$$+ \int_0^\infty v(x,t).\exp\left\{-\int_0^x \gamma(\xi)\, d\xi - \int_0^x \alpha(\eta)\, d\eta\right\} dx$$
$$+ \sum_{n=1}^{N} \int_0^\infty \int_0^\infty w_n(x,y,t).\exp\left\{-\int_0^x \gamma(\xi)\, d\xi - \int_0^y \alpha(\eta)\, d\eta\right\} dy\, dx$$
$$= 1.$$

Setzen wir die einfachen Lösungen der Gleichungen (233.1a-c) in die Gleichungen (233.2a-h) ein, so erhalten wir ein reines Integralgleichungssystem. Zur Behandlung dieses Systems verweisen wir auf die Arbeiten von J. KEILSON und A. KOOHARIAN [7], [8].

3. DAS MATHEMATISCHE MODELL: EIN SPEZIALFALL.

31. DIE BESETZUNGSWAHRSCHEINLICHKEITEN.

311. BEDINGUNGSGLEICHUNGEN.

Def. 11 UNTER DER BESETZUNGSWAHRSCHEINLICHKEIT $P_n(t)$ VERSTEHEN WIR DIE WAHRSCHEINLICHKEIT DAFÜR, DASS DIE BESETZUNGSZAHL x_t DEN WERT n ANNIMMT.

Für das allgemeine Modell lauten die Besetzungswahrscheinlichkeiten:

(311.1)
$$P_o(t) = \int_o^\infty U(x,t)\,dx,$$
$$P_1(t) = \int_o^\infty V(x,t)\,dx + \int_o^\infty \int_o^x W_1(x,y,t)\,dy\,dx,$$
$$P_n(t) = \int_o^\infty \int_o^\infty W_n(x,y,t)\,dy\,dx \quad (2 \leq n < N) \text{ und}$$
$$P_N(t) = \int_o^\infty \int_x^\infty W_N(x,y,t)\,dy\,dx.$$

Dabei sind die Größen $P_n(0)$ für $0 \leq n \leq N$ durch Integrale entsprechender Bauart mit den Funktionen $U_o(x)$, $V_o(x)$, $W_{on}(x,y)$ vorgegeben.
In dem Spezialfall $\gamma(x) = \lambda$, $\alpha(y) = \mu$ lassen sich für die Besetzungswahrscheinlichkeiten einfache Bedingungsgleichungen aus den Gleichungen (231.1-5) und (232.1-6) durch Integration herleiten. Dieser Spezialfall bedeutet, daß die Größen θ_g und θ_a negativ exponentiell mit den Parametern λ und μ verteilt sind.
Wir werden nun in einem Fall die Bedingungsgleichungen für die Besetzungswahrscheinlichkeiten explizit herleiten:

$$\frac{\partial}{\partial t} V(x,t) + \frac{\partial}{\partial x} V(x,t) + (\lambda + \mu)V(x,t) = 0,$$

$$V^x(t) = \lambda \cdot \int_0^\infty U(x,t)\, dx = \lambda \cdot P_0(t).$$

Wir integrieren die Differentialgleichung bezüglich x, wobei wir annehmen, daß die Differentiation nach t und die Integration nach x vertauschbar sind und $V(x,t)$ bei $x = t$ stetig ist. Setzen wir dann die zweite Relation ein, so erhalten wir

$$\frac{d}{dt} \int_0^\infty V(x,t)\, dx - \lambda \cdot P_0(t) + (\lambda + \mu) \int_0^\infty V(x,t)\, dx = 0. \tag{311.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} W_1(x,y,t) + \frac{\partial}{\partial x} W_1(x,y,t) + \frac{\partial}{\partial y} W_1(x,y,t) + (\ +\ ) W_1(x,y,t)$$

$$W_1^y(x,t) = \mu \cdot \int_0^\infty W_2(x,y,t)\, dy.$$

Wir integrieren die Differentialgleichung zuerst bezüglich y von 0 bis x und dann bezüglich x von 0 bis ∞. Unter der Annahme, daß alle infiniten Operationen vertauschbar sind, $W_1(x,y,t)$ für $x = y = t$ stetig ist, gewinnen wir bei Benutzung der zweiten Gleichung

$$\frac{d}{dt} \int_0^\infty \int_0^x W_1(x,y,t)\, dy\, dx - \mu \cdot \int_0^\infty \int_0^\infty W_2(x,y,t)\, dy\, dx + (\lambda + \mu) \int_0^\infty \int_0^x W_1(x,y,t)\, dy\, dx = 0 \tag{311.3}$$

Addieren wir die Gleichungen (311.2) und (311.3), so folgt aus (311.1) die Differentialgleichung:

$$\frac{d}{dt} P_1(t) = -(\lambda + \mu) P_1(t) + \lambda \cdot P_0(t) + \mu \cdot P_2(t).$$

Die anderen Gleichungen der Gruppen (231.1-5) und (232.1-6) reduzieren wir in gleicher Weise und gewinnen das System:

(311.4)
$$\frac{d}{dt} P_o(t) = -\lambda . P_o(t) + \mu . P_1(t)$$

$$\frac{d}{dt} P_n(t) = -(\lambda+\mu) . P_n(t) + \mu . P_{n+1}(t) + \lambda . P_{n-1}(t) \quad (1 \leq n < N)$$

$$\frac{d}{dt} P_N(t) = -\mu . P_N(t) + \lambda . P_{N-1}(t).$$

Die Funktionen $P_n(0)$ sind als Anfangswerte vorgegeben.

Zu Beginn der Untersuchungen des allgemeinen mathematischen Modells stellten wir fest, daß der Anfangspunkt t_o ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit der Ergebnisse als zeitlicher Ursprung gewählt werden darf. Das bedeutet umgekehrt, daß wir das gleiche System (311.4) in dem betrachteten Spezialfall erhalten, wenn wir die Anfangswerte in einem beliebigen Zeitpunkt t_o kennen. Dabei ist nur zu beachten, daß das System (311.4) für alle $t > t_o$ gültig ist.

312. DER STOCHASTISCHE PROZESS x_t.

Unsere bisherigen Betrachtungen hatten das Ziel, unter Voraussetzung der Existenz des stochastischen Prozesses x_t und eines geeigneten Wahrscheinlichkeitsfeldes $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ notwendige Bedingungen für die Wahrscheinlichkeiten $P(x_t=n)$ aus dem verbalen Modell zu entwickeln. Es bleiben zwei Aufgaben. Die Berechnung der $P_n(t) = P(x_t=n)$ einerseits und der Nachweis andererseits, daß es einen stochastischen Prozeß x_t und einen geeigneten Maßraum $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ mit der Eigenschaft "$P(x_t=n)$ löst die abgeleiteten Bedinungsgleichungen" überhaupt gibt.

Nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz für endliche, lineare Differentialgleichungssysteme [6], hat das System (311.4) genau eine Lösung, welche die in Grenzen wählbaren

Größen $P_n(t_o)$ als Anfangswerte besitzt. Doch wissen wir nicht, ob diese Lösung für jedes feste $t > t_o$ die notwendigen Bedingungen einer Wahrscheinlichkeitsverteilung erfüllt.

Def. 12 UNTER DER ÜBERGANGSWAHRSCHEINLICHKEIT $P_n^m(t,t_1)$ VERSTEHEN WIR DIE WAHRSCHEINLICHKEIT DAFÜR, DASS DIE BESETZUNGSZAHL x_t ZUR ZEIT $t \geqslant t_1$ DEN WERT n ANNIMMT, WENN SIE ZUR ZEIT t_1 DEN WERT m BESESSEN HAT. $(0 \leq n,m \leq N)$

Wir setzen die Existenz dieser Übergangswahrscheinlichkeiten für die folgenden Betrachtungen voraus. Dann gilt

$$(312.1) \qquad P_n(t) = \sum_{k=o}^{N} P_n^k(t,t_1).P_k(t_1) \quad \text{für} \quad t \geqslant t_1 \geqslant t_o.$$

Im Falle $t_1=t_o$ wählen wir als spezielle Schar von Anfangsverteilungen

$$P_k^{(m)}(t_o) = \delta_k^m \quad \text{mit} \quad 0 \leq m \leq N.$$

Die Lösungsschar von (311.4) mit diesen Anfangswerten bezeichnen wir mit $P_n^{(m)}(t)$. Aus (312.1) folgt für jedes feste m

$$P_n^m(t,t_o) = P_n^{(m)}(t).$$

Also sind für feste Werte von m die Übergangswahrscheinlichkeiten $P_n^m(t,t_o)$ Lösungen von (311.4) und erfüllen die Anfangsbedingungen $P_n^m(t_o,t_o) = \delta_n^m$. Daraus erkennen wir weiter, daß diese Größen nur Funktionen der Differenz $t-t_o$ sind. Die Gleichung (312.1) verwandelt sich dann für $t_1=t_o$ in

$$(312.2) \qquad P_n(t) = \sum_{k=o}^{N} P_n^k(t-t_o).P_k(t_o).$$

Wenn wir umgekehrt zeigen können, daß die Größen $P_n^m(t-t_o)$ als Lösungen von (311.4) bezüglich t - und sie sind durch die Anfangswerte $P_n^m(0) = \delta_n^m$ eindeutig bestimmt - die Eigenschaften

(312.3) $P_n^m(t-t_o) \geq 0$ und

(312.4) $\sum_{n=o}^{N} P_n^m(t-t_o) = 1$

für jedes m mit $0 \leq m \leq N$ und jedes $t \geq t_o$ besitzen, so sind die jetzt durch (312.2) zu definierenden Funktionen $P_n(t)$ ebenfalls Lösungen von (311.4) für $t > t_o$, besitzen für $t = t_o$ die gegebenen Größen $P_k(t_o)$ als Anfangswerte und erfüllen die Bedingungen einer Wahrscheinlichkeitsverteilung genau dann, wenn durch die Anfangswerte bezüglich k eine Wahrscheinlichkeitsverteilung beschrieben wird. Wir können somit die gesuchten Besetzungswahrscheinlichkeiten eindeutig mit Hilfe der Übergangswahrscheinlichkeiten und der gegebenen Anfangsverteilung beschreiben. Die Frage nach der Existenz der Besetzungswahrscheinlichkeiten ist bei bekannter Anfangsverteilung auf die Frage nach der Existenz der Übergangswahrscheinlichkeiten zurückgeführt.

Bevor wir deren Existenz nachweisen, schreiben wir die Gleichungen (311.4) um. Wir führen eine neue Variable, die dimensionslose Zeit $\tau = t/t_A$, ein. t_A beschreibt die mittlere Auswertungszeit eines Signals mit dem Wert $t_A = 1/\mu$. Für den auftretenden Quotienten λ/μ setzen wir den Parameter ϱ und erhalten für $P_n^m(t-t_o) = P_n^m(\tau-\tau_o;\varrho,N)$ das folgende System. Wir verwenden, da keine Verwechslung möglich ist, für die neue Funktion das gleiche Zeichen P.

(312.5) $$\frac{d}{d\tau} P_o^m(\tau-\tau_o;\varrho,N) = -\varrho.P_o^m + P_1^m$$

$$\frac{d}{d\tau} P_n^m(\tau-\tau_o;\varrho,N) = -(1+\varrho).P_n^m + P_{n+1}^m + \varrho.P_{n-1}^m \qquad (1 \leq n < N)$$

$$\frac{d}{d\tau} P_N^m(\tau-\tau_o;\varrho,N) = -P_N^m + \varrho.P_{N-1}^m$$

und

(312.6) $$P_n^m(0;\varrho,N) = \delta_n^m.$$

Addieren wir die N+1 Gleichungen in (312.5) auf, so erhalten wir:

$$\frac{d}{d\tau} \sum_{n=o}^{N} P_n^m(\tau-\tau_o;\varrho,N) = 0 \quad \text{für alle } \tau \geq \tau_o \text{ und daraus}$$

$$\sum_{n=o}^{N} P_n^m(\tau-\tau_o;\varrho,N) = \text{const.}$$

Aus (312.6) folgt

$$\sum_{n=o}^{N} P_n^m(0;\varrho,N) = 1.$$

Da alle $P_n^m(\tau-\tau_o;\varrho,N)$ in $\tau=\tau_o$ zumindest rechtsseitig stetig sind, gilt die letzte Gleichung für alle $\tau \geq \tau_o$.

Zum Nachweis der Eigenschaft $P_n^m(\tau-\tau_o;\varrho,N) \geq 0$ schreiben wir die Gleichungen (312.5) und (312.6) in Matrizengestalt:

(312.7) $$\frac{d}{d\tau} \mathcal{P}(\tau-\tau_o;\varrho,N) = \mathcal{P}(\tau-\tau_o;\varrho,N).\mathcal{Q} \text{ mit } \mathcal{P}(0;\varrho,N) = \mathcal{E},$$

Zur Erklärung der Bezeichnungen:

$\mathcal{P}(\tau-\tau_o;\varrho,N) = (P_n^m(\tau-\tau_o;\varrho,N))$, $\mathcal{E} = (\delta_n^m)$, $\mathcal{Q} = (q_n^m)$ mit

$q_o^o = -\varrho$, $q_m^m = -(1+\varrho)$ für $0 < m < N$, $q_N^N = -1$,

$q_{m+1}^m = \varrho$, $q_{m-1}^m = 1$ und $q_n^m = 0$ für $|m-n| > 1$.

Dabei bedeuten stets m den Zeilenindex, n den Spaltenindex.

Die Lösung von (312.7) lautet:

$$(312.8)\qquad \mathcal{P}(\tau-\tau_0;\varrho,N) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathcal{Q}^k(\tau-\tau_0)^k}{k!}\ ,\quad \mathcal{Q}^0 = \mathcal{E}\ .$$

Da die Matrix $\mathcal{Q}$ endlich ist, kann die rechte Seite von (312.8) in sinnvoller Weise auch als Exponentialfunktion geschrieben werden. Aus dieser Darstellung folgt eine wichtige Relation.

Für jedes Tripel τ_1, τ_2, τ_3 mit $\tau_0 \le \tau_1 \le \tau_2 \le \tau_3$ gilt

$$(312.9)\qquad \mathcal{P}(\tau_3-\tau_1;\varrho,N) = \mathcal{P}(\tau_2-\tau_1;\varrho,N)\,\mathcal{P}(\tau_3-\tau_2;\varrho,N)$$

$$= \mathcal{P}(\tau_3-\tau_2;\varrho,N)\,\mathcal{P}(\tau_2-\tau_1;\varrho,N).$$

Für die folgende Betrachtung setzen wir zur Vereinfachung der Schreibweise $\tau-\tau_0 = \sigma$.

Wir schreiben $\mathcal{P}(\sigma;\varrho,N) \geqslant 0$, wenn alle Elemente dieser Matrix nicht negativ sind. Es bleibt $\mathcal{P}(\sigma;\varrho,N) \geqslant 0$ zu beweisen.

Die Matrix $\mathcal{P}_\varepsilon(\sigma;\varrho,N) = e^{\mathcal{Q}_\varepsilon\sigma} = e^{((1+\varrho+\varepsilon)\dot{\mathcal{E}}+\mathcal{Q})\sigma}$ $(\varepsilon>0)$ ist Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d}{d\sigma}\,\mathcal{P}_\varepsilon(\sigma;\varrho,N) = \mathcal{P}_\varepsilon(\sigma;\varrho,N)((1+\varrho+\varepsilon)\mathcal{E}+\mathcal{Q})$$

mit der Anfangsbedingung $\mathcal{P}_\varepsilon(0;\varrho,N) = \mathcal{E}$.

Da aber $\mathcal{Q}_\varepsilon \geqslant 0$ ist, gilt $\mathcal{P}_\varepsilon(\sigma;\varrho,N) \geqslant 0$.

Andererseits löst aber auch die Matrix

$$\tilde{\mathcal{P}}_\varepsilon(\sigma;\varrho,N) = e^{(1+\varrho+\varepsilon)\sigma}\cdot e^{\mathcal{Q}\sigma}$$

die oben angegebene Differentialgleichung und besitzt die gleichen Anfangswerte für $\sigma = 0$. Beide Lösungen stimmen überein. Da $\exp(1+\varrho+\varepsilon)\sigma \geqslant 0$ ist, folgt unsere Behauptung $\mathcal{P}(\sigma;\varrho,N) = \exp \mathcal{Q}\sigma \geqslant 0$. [12]

Diese Untersuchungen reichen aus, die Existenz sowohl des stochastischen Prozesses x_t als auch des Wahrscheinlichkeitsfeldes $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ nachzuweisen. Wir haben den folgenden Satz dem Buch von K. L. CHUNG [3] entnommen und ihn unserem speziellen Problem entsprechend formuliert:

ERFÜLLEN DIE MATHEMATISCHEN GRÖSSEN $P_n^m(\sigma;\varrho,N)$ DIE FOLGENDEN BEDINGUNGEN

$$P_n^m(\sigma;\varrho,N) \geq 0,$$

$$\sum_{n=o}^{N}{}' P_n^m(\sigma;\varrho,N) = 1 \quad \text{und}$$

$$\sum_{n=o}^{N}{}' P_n^m(\sigma_1;\varrho,N) P_1^n(\sigma_2;\varrho,N) = P_1^m(\sigma_1+\sigma_2;\varrho,N)$$

FÜR σ, σ_1, $\sigma_2 \geq 0$ UND $0 \leq n,m \leq N$ UND IST EINE AUSGANGSVERTEILUNG $P_m(\tau_o;\varrho,N)$ FÜR $0 \leq m \leq N$ BELIEBIG VORGEGEBEN, SO LÄSST SICH DAZU IN NATÜRLICHER WEISE EIN WAHRSCHEINLICHKEITSFELD $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ UND EINE EINPARAMETRIGE SCHAR BEZÜGLICH $\mathfrak{F}$ MESSBARER FUNKTIONEN (STOCHASTISCHE VARIABLE) $\{ x_\tau(\omega); \tau \geq \tau_o \}$ SO KONSTRUIEREN, DASS DIE GRÖSSEN $P_n^m(\sigma;\varrho,N)$ DIE ÜBERGANGSWAHRSCHEINLICHKEITEN DIESES DURCH $x_\tau(\omega)$ GEGEBENEN HOMOGENEN, MARKOFFSCHEN PROZESSES DARSTELLEN. DER ZUSTANDSRAUM DIESES PROZESSES IST DIE MENGE $\{0,1,2,\ldots,N\}$.

Damit sind nachträglich unsere bisherigen mathematischen Betrachtungen vollständig gesichert, und wir können uns der Aufgabe zuwenden, die Größen $P_n^m(\sigma;\varrho,N)$ zu berechnen.

313. DIE ANALYTISCHE GESTALT DER ÜBERGANGSWAHRSCHEINLICHKEITEN.

Wie wir in dem vergangenen Abschnitt gesehen haben, gilt

$$0 \leq P_n^m(\sigma;\varrho,N) \leq 1. \tag{313.1}$$

Aus dem Differentialgleichungssystem folgt dann

$$\left|\frac{d}{d\sigma} P_n^m(\sigma;\varrho,N)\right| \leq 2(1+\varrho). \tag{313.2}$$

Es existieren somit für $Re(s) > 0$ die LAPLACEtransformierten von $P_n^m(\sigma;\varrho,N)$ und $\frac{d}{d\sigma} P_n^m(\sigma;\varrho,N)$ für alle $\varrho > 0$ und $0 \leq n,m \leq N$. Wir bezeichnen die LAPLACEtransformierten der Funktionen $P_n^m(\sigma;\varrho,N)$ mit $p_n^m(s)$ und erhalten als äquivalentes System zu den Differentialgleichungen und der Anfangsbedingung die algebraischen Gleichungen:

$$\begin{aligned}
-(\varrho+s).p_o^m(s) + p_1^m(s) &= -\delta_o^m, \\
-(1+\varrho+s).p_n^m(s) + p_{n+1}^m(s) + \varrho.p_{n-1}^m(s) &= -\delta_n^m \quad (0<n<N), \\
-(1+s).p_N^m(s) + \varrho.p_{N-1}^m(s) &= -\delta_N^m.
\end{aligned} \tag{313.3}$$

Wir substituieren $1+\varrho+s = z$ und $p_n^m(s) = r_n^m(z)$ und erhalten die Gleichungen

$$(1-z).r_o^m(z) + r_1^m(z) = -\delta_o^m, \tag{313.4a}$$

$$-z.r_n^m(z) + r_{n+1}^m(z) + \varrho.r_{n-1}^m(z) = -\delta_n^m \quad (0<n<N), \tag{313.4b}$$

$$(\varrho-z).r_N^m(z) + \varrho.r_{N-1}^m(z) = -\delta_N^m. \tag{313.4c}$$

Aus (313.4a) und (313.4b) gewinnen wir rekursiv

$$r_n^m(z) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i.\delta_{n-i}^m.c_{i-1}(z) + (-1)^n b_n(z).r_o^m(z) \tag{313.5}$$

mit

$$c_k(z) = -z.c_{k-1}(z) - \varrho.c_{k-2}(z);\ c_1(z) = -z,\ c_o(z) = 1 \tag{313.6}$$

und

$$(313.7)\quad b_k(z) = -z.b_{k-1}(z) - \varrho.b_{k-2}(z);\ b_1(z) = 1-z,\ b_0(z) = 1$$

für alle $k \geq 2$.

Aus (313.5) und (313.4c) erhalten wir

$$(313.8)\quad (-1)^N.q_{N+1}(z).r_0^m(z) = \sum_{i=0}^{N}{}' (-1)^{i+1}.\delta_{N-i}^m.a_i(z)$$

mit

$$(313.9)\quad q_{N+1}(z) = (\varrho-z).b_N(z) - \varrho.b_{N-1}(z) \quad \text{und}$$

$$(313.10)\quad a_k(z) = (\varrho-z).c_{k-1}(z) - \varrho.c_{k-2}(z);\ a_1(z) = -z,\ a_0(z) = 1$$

für $k \geq 2$.

Werten wir die Definition des Kroneckersymbols δ_n^m aus, so gewinnen wir aus (313.8) und (313.5) die Relationen

$$(313.11)\quad (-1)^N.q_{N+1}(z).r_0^m(z) = (-1)^{m+1+N}.a_{N-m}(z),$$

$$(313.12)\quad q_{N+1}(z).r_n^m(z) = (-1)^{m+n+1}.b_n(z).a_{N-m}(z) \quad \text{für } 0 \leq n \leq m \leq N \text{ und}$$

$$(313.13)\quad q_{N+1}(z).r_n^m(z) = (-1)^{m+n+1}.b_n(z).a_{N-m}(z) - q_{N+1}(z).c_{n-m-1}(z)$$

für $0 \leq m < n \leq N$.

Die Gleichung (313.13) läßt sich in eine (313.12) entsprechende Gestalt bringen. Wir definieren q_k für alle $k \geq 2$ durch die Gleichung (313.9), wenn wir dort N durch k ersetzen. Aus den Rekursionsformeln (313.6), (313.7) u (313.10) folgt: Alle Funktionen $a_k(z)$, $b_k(z)$ und $c_k(z$ genügen der Rekursionsformel

$$f_k(z) = -z.f_{k-1}(z) - \varrho.f_{k-2}(z) \quad \text{mit} \quad f_0(z) = 1.$$

Sie unterscheiden sich nur durch die zweite Anfangsbedingun

$a_1(z) = \varrho - z$, $b_1(z) = 1 - z$ und $c_1(z) = -z$.

Mit Hilfe dieser Rekursionen und dem Prinzip der vollständigen Induktion beweist man:

(313.14) $q_i(z) = a_k(z).b_{i-k}(z) - \varrho.a_{k-1}(z).b_{i-k-1}(z)$ und

(313.15) $q_i(z) = c_k(z).q_{i-k}(z) - \varrho.c_{k-1}(z).q_{i-k-1}(z)$ für $i > k$.

Aus (313.14) folgt für $n \geq m$

(313.16) $a_{N-m}(z).b_n(z) = q_{N+n-m}(z) + \varrho.a_{N-m-1}(z).b_{n-1}(z)$.

Aus (313.15) folgt für $n > m$

(313.17) $q_{N+n-m}(z) = c_{n-m-1}(z).q_{N+1}(z) - \varrho.c_{n-m-2}(z).q_N(z)$,

wobei wir eventuell $c_{-1} = 0$ setzen müssen.

Die beiden letzten Gleichungen liefern nun die Rekursionsformel:

(313.18) $a_{N-m}(z).b_n(z) - c_{n-m-1}(z).q_{N+1}(z)$

$= \varrho.\left\{a_{N-m-1}(z).b_{n-1}(z) - c_{n-m-2}(z).q_N(z)\right\}$.

Aus dieser gewinnen wir das Ergebnis:

(313.19) $a_{N-m}(z).b_n(z) - c_{n-m-1}(z).q_{N+1}(z)$

$= \varrho^{n-m}.a_{N-n}(z).b_m(z)$.

Dann gilt:

(313.20) $q_{N+1}(z).r_n^m(z)$

$= (-1)^{m+n+1}.a_{N-m}(z).b_n(z)$ für $0 \leq n \leq m \leq N$,

$= (-1)^{m+n+1}.a_{N-n}(z).b_m(z).\varrho^{n-m}$ für $0 \leq m \leq n \leq N$.

Aus dieser Beziehung können wir $r_n^m(z)$ für solche z mit $q_{N+1}(z) \neq 0$ bestimmen. Es ist daher notwendig, die Nullstellen von $q_{N+1}(z)$, der Koeffizientendeterminante des Gleichungssystems (313.4) zu berechnen.

Die Rekursionsformeln (313.6) und (313.7) führen zu der Gleichung $b_k(z) = c_k(z) + c_{k-1}(z)$ für $k \geq 1$. Diese setzen wir in die Rekursionsformel für $q_{N+1}(z)$ ein und benutzen anschließend die Rekursionsformel für $c_k(z)$. Das Ergebnis ist die folgende Gleichungskette:

$$
\begin{aligned}
(313.21)\quad q_{N+1}(z) &= (\varrho - z).c_N(z) + (\varrho - z).c_{N-1}(z) - \varrho.c_{N-1}(z) - \varrho.c_{N-2}(z) \\
&= (\varrho - z).c_N(z) + \left\{ -z.c_{N-1}(z) - \varrho.c_{N-2}(z) \right\} \\
&= (1 + \varrho - z).c_N(z).
\end{aligned}
$$

Die erste Nullstelle von $q_{N+1}(z)$ ist damit bestimmt:

$$(313.22)\quad z_o = 1 + \varrho.$$

Wir berechnen $c_N(z)$ und deren Nullstellen. Mit Hilfe der Substitution $z = 2\varrho^{1/2}.x$ setzen wir $c_k(z) = (-1)^k \varrho^{k/2} U_k$ und erhalten

$$(313.23)\quad U_k(x) = 2x.U_{k-1}(x) - U_{k-2}(x);\ U_1(x) = 2x,\ U_o(x) = 1.$$

Die Lösungen sind die TSCHEBYSCHEFFpolynome 2. Art [1]. Für $-1 \leq x \leq 1$ und $x = \cos\theta$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ besitzen wir eine weitere Darstellung dieser Polynome:

$$(313.24)\quad U_k(\cos\theta) = \frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}.$$

Dieser Darstellung entnehmen wir die Nullstellen von $c_N(z)$

$$(313.25)\quad z_k = 2\varrho^{1/2}.\cos\frac{k\pi}{N+1} \quad \text{mit} \quad k = 1,2,\ldots,N.$$

Zusammen mit $z_o = 1+\varrho$ sind damit alle Nullstellen von $q_{N+1}(z)$ bekannt. Wir dividieren die Relation (313.20) für $z \neq z_k$ $(k = 0,1,2,\ldots,N)$ durch $q_{N+1}(z)$ und zerlegen die Terme auf der rechten Seite der entstehenden Gleichungen in Partialbrüche:

$$(313.26)\quad r_n^m(z) = (-1)^{m+n}\left\{ \frac{1}{z-(1+\varrho)} \cdot \frac{a_{N-m}(1+\varrho)\cdot b_n(1+\varrho)}{c_N(1+\varrho)} + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{z-z_k} \cdot \frac{a_{N-m}(z_k)\cdot b_n(z_k)}{(z_k-(1+\varrho))c_N'(z_k)} \right\} \quad \text{für } 0 \leq n \leq m \leq N,$$

$$= (-1)^{m+n}\cdot\varrho^{n-m}\left\{ \frac{1}{z-(1+\varrho)} \cdot \frac{a_{N-n}(1+\varrho)\cdot b_m(1+\varrho)}{c_N(1+\varrho)} + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{z-z_k} \cdot \frac{a_{N-n}(z_k)\cdot b_m(z_k)}{(z_k-(1+\ ))c_N'(z_k)} \right. \quad \text{für } 0 \leq m \leq n \leq N.$$

Aus der Rekursionsformel $a_k(z) = -z\cdot a_{k-1}(z) - \varrho\cdot a_{k-2}(z)$ folgt

$$a_k(1+\varrho) + a_{k-1}(1+\varrho) = -\varrho\cdot(a_{k-1}(1+\varrho) + a_{k-2}(1+\varrho))$$
$$= (-\varrho)^{n-1}(a_1(1+\varrho) + a_o(1+\varrho))$$
$$= (-\varrho)^{n-1}(\varrho-(1+\varrho) + 1) = 0, \text{ also}$$

$$(313.27)\quad a_k(1+\varrho) = -\,a_{k-1}(1+\varrho) = (-1)^k, \text{ da } a_o(1+\varrho) = 1.$$

In gleicher Weise erhalten wir aus entsprechenden Formeln:

$$(313.28)\quad b_k(1+\varrho) = (-\varrho)^k \text{ und}$$

$$(313.29)\quad c_k(1+\varrho) = (-1)^k\cdot\frac{1-\varrho^{k+1}}{1-\varrho} \quad \text{für } \varrho \neq 1.$$

Der Koeffizient von $1/(z-(1+\varrho))$ lautet in beiden Fällen

$$(313.30)\quad \varrho^n\cdot\frac{1-\varrho}{1-\varrho^{N+1}} \quad \text{für } \varrho \neq 1.$$

Zur Bestimmung der restlichen Koeffizienten benutzen wir di
Beziehung $a_k(z) = c_k(z) + \varsigma \cdot c_{k-1}(z)$, die unmittelbar aus d
Rekursionsformel (313.10) folgt. Da für alle k mit $1 \leq$
$z_k/2\sqrt{\varsigma} = \cos\frac{k\pi}{N+1}$ zwischen -1 und +1 liegt, gilt

$$c_n(z_k) = (-1)^n \cdot \varsigma^{n/2} \cdot U_n(\cos\theta_k) = (-1)^n \cdot \varsigma^{n/2} \cdot \frac{\sin(n+1)\theta_k}{\sin\theta_k},$$

wobei wir zur Abkürzung $k\pi/(N+1) = \theta_k$ gesetzt haben, und

$$a_n(z_k) = (-1)^n \cdot \varsigma^{n/2} \cdot \left\{ \frac{\sin(n+1)\theta_k}{\sin\theta_k} - \varsigma^{1/2} \cdot \frac{\sin n\,\theta_k}{\sin\theta_k} \right\}.$$

Das Additionstheorem der trigonometrischen Funktionen liefe

(313.31) $$a_{N-m}(z_k) = (-1)^{N-m+k}\, \varsigma^{(N-m)/2} \left(\varsigma^{1/2} \frac{\sin(m+1)\theta_k}{\sin\theta_k} - \frac{\sin m\,\theta_k}{\sin\theta_k} \right),$$

(313.32) $$a_{N-n}(z_k) = (-1)^{N-n+k}\, \varsigma^{(N-n)/2} \left(\varsigma^{1/2} \frac{\sin(n+1)\theta_k}{\sin\theta_k} - \frac{\sin n\,\theta_k}{\sin\theta_k} \right).$$

Analoge Betrachtungen ergeben

(313.33) $$b_n(z_k) = (-1)^n\, \varsigma^{(n-1)/2} \left(\varsigma^{1/2} \frac{\sin(n+1)\theta_k}{\sin\theta_k} - \frac{\sin n\,\theta_k}{\sin\theta_k} \right),$$

(313.34) $$b_m(z_k) = (-1)^m\, \varsigma^{(m-1)/2} \left(\varsigma^{1/2} \frac{\sin(m+1)\theta_k}{\sin\theta_k} - \frac{\sin m\,\theta_k}{\sin\theta_k} \right).$$

Aus $$c'_N(z_k) = (-1)^N\, \varsigma^{N/2}\, \frac{1}{-2\,\varsigma^{1/2}\sin\theta} \cdot \frac{d}{d\theta} U_N(\cos\theta) \Big|_{\theta = \theta_k}$$
folgt

(313.35) $$c'_N(z_k) = (-1)^{N+1+k}\, \varsigma^{(N-1)/2} \cdot \frac{N+1}{2} \cdot \frac{1}{\sin^2\theta_k}.$$

Verwenden wir alle diese Ergebnisse, so erhalten wir eine einzige, für alle n und m mit $0 \leq n,m \leq N$ gültige Dar-stellung von $r_n^m(z)$:

(313.36) $$r_n^m(z) = \varrho^n \cdot \frac{1-\varrho}{1-\varrho^{N+1}} \cdot \frac{1}{z-(1+\varrho)} + 2 \cdot \frac{\varrho^{(n-m)/2}}{N+1} \cdot \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{z-z_k} \cdot S_k(n,m),$$

mit

(313.37) $$S_k(n,m) = \frac{(\varrho^{1/2}\sin(n+1)\theta_k - \sin n\,\theta_k)(\varrho^{1/2}\sin(m+1)\theta_k - \sin m\,\theta_k}{(1+\varrho - 2.\varrho^{1/2}.\cos\theta_k)}$$

Setzen wir $z = 1+\varrho+ s$, so erhalten wir

(313.38) $$p_n^m(s) = \varrho^n \cdot \frac{1-\varrho}{1-\varrho^{N+1}} \cdot \frac{1}{s} + 2 \cdot \frac{\varrho^{(n-m)/2}}{N+1} \cdot \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{s-s_k} \cdot S_k(n,m).$$

Die Urbilder dieser Funktionen stellen unsere gesuchten Wahrscheinlichkeiten dar:

(313.39) $$P_n^m(\sigma;\varrho,N) = \varrho^n \cdot \frac{1-\varrho}{1-\varrho^{N+1}} + 2\,\frac{\varrho^{(n-m)/2}}{N+1} \cdot \sum_{k=1}^{N} e^{-(1+\varrho-2\varrho^{1/2}.\cos\theta_k)\sigma} \cdot S_k(n,m).$$

In (313.39) wird der erste Summand für $\varrho = 1$ unbestimmt. Die Ursache liegt darin, daß in (313.29) $c_k(1+\varrho)$ für $= 1$ unbestimmt ist und daher neu berechnet werden muß. Wir erhalten $c_k(2) = (-1)^k(k+1)$. Das bedeutet, daß wir den Quotienten $(1-\varrho)/(1-\varrho^{N+1})$ durch $1/(N+1)$ in der Formel (313.39) ersetzen müssen, sobald $\varrho = 1$ angenommen wird. Darüber hinaus vereinfacht sich in diesem Fall die Darstellung wesentlich unter dem Summenzeichen in (313.39):

(313.40) $$P_n^m(\sigma;1,N) = \frac{1}{N+1}\left(1+2.\sum_{k=1}^{N} \cos(n+\tfrac{1}{2})\theta_k.\cos(m+\tfrac{1}{2})\theta_k.e^{-2(1-\cos\theta_k)\sigma}\right).$$

314. DAS VERHALTEN DER FUNKTIONEN $P_n^m(\sigma;\varrho,N)$ FÜR GROSSE WERTE VON σ.

Aus den Darstellungen (313.39) und (313.40) erkennen wir, daß mit wachsendem Argument σ die Funktion $P_n^m(\sigma;\varrho,N)$ geg

$$P_n(\varrho,N) = \varrho^n \cdot \frac{1-\varrho}{1-\varrho^{N+1}} \quad \text{, wenn } \varrho \neq 1 \text{ ist und gegen} \tag{314.1a}$$

$$P_n(1,N) = \frac{1}{N+1} \quad \text{, wenn } \varrho = 1 \text{ ist, konvergie} \tag{314.1b}$$

Wir sind auf Grund der einfachen Struktur der Größe $P_n^m(\sigma;\varrho,$ in der Lage, gute Abschätzungen für das Konvergenzverhalten anzugeben. So liefert uns die Darstellung (313.39) für $\varrho \neq 1$ die Abschätzung

$$\left| P_n^m(\sigma;\varrho,N) - P_n(\varrho,N) \right| \leq 2\varrho^{(n-m)/2} \cdot \frac{(1+\varrho^{1/2})^2}{1+\varrho-2\varrho^{1/2}\cos\theta_1} \cdot e^{-(1+\varrho-2\varrho^{1/2}\cos\theta_1)\sigma}, \tag{314.2}$$

denn es gilt für alle k mit $1 \leq k \leq N$

$$(1+\varrho-2\varrho^{1/2}\cos\theta_1) \leq (1+\varrho-2\varrho^{1/2}\cos\theta_k).$$

Aus (314.2) folgt durch Grenzübergang "ϱ gegen 1"

$$\left| P_n^m(\sigma;1,N) - P_n(1,N) \right| \leq \frac{4}{1-\cos\theta_1} \cdot e^{-2(1-\cos\theta_1)\sigma}. \tag{314.3}$$

Eine bessere Abschätzung gewinnen wir für $\varrho = 1$ aus der Darstellung (313.40):

$$\left| P_n^m(\sigma;1,N) - P_n(1,N) \right| \leq 2 \cdot e^{-2(1-\cos\theta_1)\sigma}. \tag{314.4}$$

Wir ziehen die Folgerungen aus den Ungleichungen (314.2-4):

1. Für jedes Paar (n,m) mit $0 \leq n,m \leq N$ und jedes $\varrho > 0$ existiert für $P_n^m(\sigma;\varrho,N)$ mit wachsendem σ ein positiver, von m unabhängiger Grenzwert.

2. Die Grenzwerte bilden, da ihre Summe bezüglich n den Wert 1 besitzt, eine Wahrscheinlichkeitsverteilung.

3. Auf Grund der Formel $P_n(\sigma+\tau_o;\varrho,N) = \sum_{m=o}^{N} P_n^m(\sigma;\varrho,N) P_m(\tau_o)$ existiert auch der Grenzwert

$$\lim_{\tau \longrightarrow \infty} P_n(\tau;\varrho,N) = \lim_{\sigma \longrightarrow \infty} P_n(\sigma+\tau_o;\varrho,N) = P_n(\varrho,N) \sum_{m=o}^{N} P_m(\tau_o) \tag{314.5}$$

$$= P_n(\varrho,N).$$

Das Grenzverhalten überträgt sich von den Übergangswahrscheinlichkeiten auf die Besetzungswahrscheinlichkeiten und kann durch die gleichen Exponentialfunktionen beschrieben werden. Der Einfluß jeder beliebigen Anfangsverteilung $P_m(\tau_o)$ auf den Wert von $P_n(\tau;\varrho,N)$ nimmt mit wachsendem τ exponentiell ab und ist nach genügend langer Zeit praktisch nicht mehr wirksam. Wir nennen deshalb die Größen $P_n(\varrho,N)$ die stationären Besetzungswahrscheinlichkeiten des Systems.

Wir kommen noch einmal auf die Ungleichung (314.2) zurück. Diese häng wesentlich von der Speicherkapazität N ab. Doch es gelingt für $\varrho \neq 1$ eine für alle N gültige Abschätzung zu finden. Wir setzen für $\cos \Theta_1$ den Wert 1 und erhalten

$$\left| P_n^m(\sigma;\varrho,N) - P_n(\varrho,N) \right| \leq 2\varrho^{(n-m)/2} \cdot \frac{(1+\varrho^{1/2})^2}{(1-\varrho^{1/2})^2} \cdot e^{-(1-\varrho^{1/2})^2 \sigma}. \tag{314.6}$$

Sie wird für $\varrho = 1$ auf zweierlei Weisen sinnlos. Einerseits geht das exponentielle Grenzverhalten verloren und andererseits wird der vorangestellte Faktor sinnlos. Der zweite Mangel ließe sich wahrscheinlich durch eine verbesserte Abschätzung beheben. Der erste jedoch ist grundsätzlicher Natur, da

da die Abschätzung (314.4) bezüglich der auftretenden Exponentialfunktion nicht mehr verbessert werden kann.

315. DIE ÜBERGANGSWAHRSCHEINLICHKEITEN $P_n^m(\sigma;\varrho,N)$ FÜR GROSSE WERTE VON N.

Die Darstellungen (313.39) und (313.40) können wir als DARBOUXsche Zwischensummen auffassen, die mit wachsendem N gegen die folgenden Integrale konvergieren:

Mit der Bezeichnung $\lim_{N\to\infty} P_n^m(\sigma;\varrho,N) = P_n^m(\sigma;\varrho)$ gilt

$$(315.1a)\quad P_n^m(\sigma;\varrho) = \varrho^n(1-\varrho) + 2\varrho^{(n-m)/2}\cdot\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^\pi S(x;n,m)\cdot e^{-(1+\varrho-2\varrho^{1/2}\cos x}$$

für $\varrho < 1$,

$$(315.1b)\quad P_n^m(\ ;\ ) = 0 + 2\varrho^{(n-m)/2}\cdot\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^\pi S(x;n,m)\cdot e^{-(1+\varrho-2\varrho^{1/2}\cos x}$$

für $\varrho > 1$ und

$$(315.1c)\quad P_n^m(\ ;1) = \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^\pi \cos(n+1/2)x\cdot\cos(m+1/2)x\cdot e^{-2(1-\cos x)\sigma}\,dx$$

für $\varrho = 1$.

In Bezug auf unser verbales Modell bedeutet dieser Grenzübergang das Anwachsen der Speicherkapazität auf beliebig viele Warteplätze. Im mathematischen Modell führen wir dabei einen Übergang von dem endlichen System (312.5) zu dem entsprechenden unendlichen System aus.

In der Theorie der Geburts- und Sterbeprozesse - und um solche handelt es sich hier - zeigt man [12], daß die Lösung des unendlichen Systems, wenn es die vorliegende einfache Struktur besitzt, durch einen Grenzübergang aus der Lösung eines entsprechenden endlichen Systems gewonnen werden kann.

Wir haben somit in den Formeln (315.1a-c) Darstellungen für die Lösung des unendlichen Systems gefunden. Für die spezielle Wahl $m = 0$ erhalten wir

$$(315.2a)\quad P_n^o(\sigma;\varrho) = \varrho^n(1-\varrho) + 2\varrho^{n/2}\cdot\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^\pi S(x;n,0)\cdot e^{-(1+\varrho-2\varrho^{1/2}\cos x)\sigma}\,dx$$

für $\varrho < 1$,

$$(315.2b)\quad P_n^o(\sigma;\varrho) = 0 + 2\varrho^{n/2}\cdot\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^\pi S(x;n,0)\cdot e^{-(1+\varrho-2\varrho^{1/2}\cos x)\sigma}\,dx$$

für $\varrho > 1$ und

$$(315.2c)\quad P_n^o(\sigma;1) = \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^\pi \cos x/2\cdot\cos(n+1/2)x\cdot e^{-2(1-\cos x)\sigma}\,dx$$

für $\varrho = 1$.

Dabei wurde in den Formeln (315.1-2) die Abkürzung

$$S(x;n,m) = \frac{(\varrho^{1/2}\sin(n+1)x - \sin n\,x)(\varrho^{1/2}\sin(m+1)x - \sin m\,x)}{(1+\varrho-2\varrho^{1/2}\cos x)}$$

benutzt.

Die Lösungen (315.2a-b) stimmen mit den von K. STANGE [13] angegebenen Lösungen überein, wenn man dort $\tau = \sigma$ und $\nu = n$ setzt und die Gleichung (3.12) mit Hilfe der Rekursion (4.5) und der Relationen (4.9) und (4.10) explizit ausschreibt.

Setzen wir

$P_n(\varrho) = \varrho^n(1-\varrho)$ für $\varrho < 1$ und

$P_n(\varrho) = 0$ für $\varrho \geq 1$, so gilt

$$(315.3)\quad \left|P_n^m(\sigma;\varrho) - P_n(\varrho)\right| \leq 2\varrho^{(n-m)/2}\cdot\frac{(1+\varrho^{1/2})^2}{(1-\varrho^{1/2})^2}\cdot e^{-(1-\varrho^{1/2})^2\sigma}.$$

Für den Fall $\varrho = 1$ können wir keine derartige Abschätzung erwarten, was wir aus der Relation (314.4) ersehen können.

Dennoch gilt auch hier

$$\left|P_n^m(\sigma;1) - P_n(1)\right| \longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad \text{"}\sigma \text{ gegen } \infty\text{"}.$$

Da auf der rechten Seite von (315.1c) der Integrand für alle $\sigma \geqslant 0$ und alle x mit $0 \leq x \leq \pi$ gleichmäßig durch 1 abgeschätzt werden kann, gibt es zu jeden $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon\pi}{2}$ derart, daß für alle $\delta \leq \delta(\varepsilon)$

$$\frac{2}{\pi}.\left|\int_0^{\delta} \cos(n+1/2)x.\cos(m+1/2)x.e^{-2(1-\cos x)\sigma}\,dx\right| < \varepsilon \quad \text{ist.}$$

Bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ und festem $\delta_0 < \delta(\varepsilon)$ gilt:

$$\left|P_n^m(\sigma;1) - P_n(1)\right| < \varepsilon + 2.e^{-2(1-\cos\delta_0)\sigma}.$$

Da $P_n(1) = 0$ und $P_n^m(\sigma;1) > 0$ folgt für "σ gegen ∞"

$$\lim_{\sigma \to \infty} P_n^m(\sigma;1) < \varepsilon .$$

Die Größe ε war aber beliebig gewählt, und es gilt notwendi

$$\lim_{\sigma \to \infty} P_n^m(\sigma;1) = 0 = P_n(1).$$

32. DIE BELASTUNGSPERIODE DER ARBEITSZELLE.

321. DAS MODIFIZIERTE DIFFERENTIALGLEICHUNGSSYSTEM.

Def. 13 EINE BELASTUNGSPERIODE b_{τ_1} DER ARBEITSZELLE BEGINNT DAMIT, DASS ZU EINEM ZEITPUNKT $\tau_1 \geqslant \tau_0$ EIN SIGNAL VON DEM INPUTGENERATOR AUSGESANDT UND IN DIE LEERE ARBEITSZELLE EINGESPEICHERT WIRD. SIE ENDET, WENN ZUM ERSTEN MAL DANACH DIE ARBEITSZELLE ÜBER EIN ECHTES ZEITINTERVALL HIN LEER IST.

Wir wollen b_{τ_1} als stochastische Variable auffassen und deren Verteilungsfunktion bestimmen. Wir setzen für die

folgenden Untersuchungen voraus, daß alle vorkommenden Grössen im mathematischen Sinn existieren.

Da b_{τ_1} keiner negativen Werte fähig ist, gilt:

(321.1) $P(b_{\tau_1} < \sigma) = 0$ für alle $\sigma \leq 0$.

Zur Bestimmung der Verteilungsfunktion von b_{τ_1} für $\sigma > 0$ gehen wir folgendermaßen vor:
Wir beobachten das laufende System. Im Zeitpunkt $\sigma_1 \geq \tau_0$ beginne eine neue Belastungsperiode der Arbeitszelle. Sie sei zu Ende in einem Zeitpunkt $\sigma_2 > \tau_1$. Von diesem Zeitpunkt ab blockieren wir in unserer Vorstellung den leeren Informationsspeicher für alle später ausgesandten Signale. Diese Maßnahme bedeutet, daß wir keine Übergänge vom Zustand 0 in höhere Zustände zulassen. Für den in dieser Weise veränderten Prozeß der Besetzungszahlen, den wir mit dem Symbol y_τ kennzeichnen, gilt:

(321.2) $P(y_\tau = k / y_{\tau_2} = i) = 1$ für $i=0$ und $k=0$ und $\tau \geq \tau_2 \geq \tau_1$,
$= 0$ für $i=0$ und $k \neq 0$ und $\tau \geq \tau_2 \geq \tau_1$.

Wir wissen darüber hinaus, daß unser System im Zeitpunkt τ_1 im Zustand 1 war.

(321.3) $P(y_{\tau_1} = i) = \delta_1^i$.

Auf Grund dieser Relation und der Definition der Übergangswahrscheinlichkeit finden wir für den Prozeß y_τ:

(321.4) $P_k(\tau) = P(y_\tau = k) = P(y_\tau = k / y_{\tau_1} = 1) = P_k^1(\tau, \tau_1)$.

Damit sind wir aber in der Lage, formal die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Belastungsperiode b_{τ_1} anzugeben. Ist

nämlich das System im Zeitpunkt $\tau = \sigma + \tau_1$ $(\sigma > 0)$ im Zustand 0, so muß auf Grund des oben angegebenen Verfahrens die Belastungsperiode $b_{\tau_1} < \sigma$ sein. Ist umgekehrt $b_{\tau_1} < \sigma$, so ist unser System im Zeitpunkt $\tau_1 + \sigma$ sicher leer, also im Zustand 0.

(321.5) $$P(b_{\tau_1} < \sigma) = P_0^1(\tau_1+\sigma; \tau_1).$$

Es bleibt uns die Aufgabe, die Übergangswahrscheinlichkeit $P_0^1(\tau_1+\sigma, \tau_1)$ zu berechnen und ihre Eigenschaften zu untersuchen. Aus den Modellvoraussetzungen können wir für die Übergangswahrscheinlichkeiten des Prozesses y, die wir mit $P_k^i(\tau, \tau_2)$ $(\tau \geq \tau_2 \geq \tau_1)$ bezeichnen, ebenfalls ein Differentialgleichungssystem ableiten. Dieses unterscheidet sich auf Grund der Eigenschaft (321.2) nur in den ersten beiden Gleichungen von dem System (312.5).

(321.6)
$$\frac{d}{d\tau} P_0^i(\tau, \tau_2) = P_1^i,$$

$$\frac{d}{d\tau} P_1^i(\tau, \tau_2) = -(1+\varrho)P_1^i + P_2^i,$$

$$\frac{d}{d\tau} P_k^i(\tau, \tau_2) = -(1+\varrho)P_k^i + P_{k+1}^i + \varrho \cdot P_{k-1}^i \quad (2 \leq k < N),$$

$$\frac{d}{d\tau} P_N^i(\tau, \tau_2) = -P_N^i + \varrho \cdot P_{N-1}^i,$$

$$P_k^i(\tau_2, \tau_2) = \delta_k^i.$$

Dieses System besitzt eine eindeutige Lösung, die nur von der Differenz $\tau - \tau_2$ abhängt. Dann ist $P(b_{\tau_1} < \sigma) = P_0^1(\tau_1+\sigma,$ nur eine Funktion von σ; alle möglichen Belastungsperioden der Arbeitszelle sind in gleicher Weise verteilt.

Die Bezeichnung "Verteilungsfunktion" für $P_0^1(\tau_1+\sigma, \tau_1)$ ist eigentlich noch nicht berechtigt, solange wir an ihr nicht

die Eigenschaften einer Verteilungsfunktion nachgewiesen haben. Wir wollen uns deshalb noch etwas mit den Lösungen des Systems (321.6) befassen.

Für $i=0$ können wir diese sofort hinschreiben:

(321.7) $$P_0^0(\tau,\tau_2) = 1, \quad P_k^0(\tau,\tau_2) = 0 \quad \text{für} \quad k>0 \quad \text{und} \quad \tau \geq \tau_2 \geq \tau_1.$$

Allgemein gilt, wie bei den Lösungen des Systems (312.5)

(321.8) $$P_k^i(\tau,\tau_2) \geq 0, \quad \sum_{k=0}^{N} P_k^i(\tau,\tau_2) = 1 \qquad \text{für} \quad \tau \geq \tau_2 \geq \tau_1 \quad \text{und}$$

$$\sum_{l=0}^{N} P_l^i(\tau,\tau_3) P_k^l(\tau_3,\tau_2) = P_k^i(\tau,\tau_2) \qquad \text{für} \quad \tau \geq \tau_3 \geq \tau_2 \geq \tau_1.$$

Auf Grund dieser Eigenschaften sind wir wieder in der Lage, die Existenz der benutzten Größen in mathematischer Hinsicht zu sichern. Wir werden darauf nicht näher eingehen und auf das Buch von K. L. CHUNG [3] verweisen.

Aus der Relation (321.8) folgt insbesondere, daß die beiden Funktionen $P_0^1(\tau_1+\sigma,\tau_1)$ und $P_1^1(\tau_1+\sigma,\tau_1)$ zwischen 0 und 1 liegen. Auf Grund der ersten Differentialgleichung des Systems (321.6) wächst die Funktion $P_0^1(\tau_1+\sigma,\tau_1)$ monoton mit σ. Auf Grund der Anfangsbedingung des Systems ist sie für τ_1+0 selbst 0. Darüber hinaus ist sie als Lösung des Differentialgleichungssystems stetig differenzierbar, also sicher stetig. Wenn wir jetzt noch zeigen können, daß sie mit wachsendem σ gegen 1 strebt, so haben wir bewiesen, daß alle Eigenschaften einer Verteilungsfunktion erfüllt sind. Wegen der Monotonie und der Beschränktheit der betrachteten Funktion existiert sicher der fragliche Grenzwert. Zusammen mit der analytischen Gestalt der Verteilungsfunktion werden wir ihn im nächsten Abschnitt bestimmen.

322. DIE ANALYTISCHE GESTALT DER GRÖSSEN $P_k^i(\tau_1+\sigma,\tau_1)$.

Wir beschränken uns auf den Fall $i = 1$. Da die Funktionen $P_k^i(\tau_1+\sigma,\tau_1)$ die Relationen (321.6) und (321.8) erfüllen, existieren die Laplacetransformierten dieser Funktionen und ihrer Ableitungen für $Re(s) > 0$. Wenden wir die LAPLACEtransformation auf das System (321.6) an, setzen anschliessend $1+\varrho+s = z$ und $p_k^1(s) = q_k^1(z)$, so erhalten wir das folgende algebraische System:

$$(322.1)\quad (z-(1+\varrho))q_0^1(z) = q_1^1(z),$$

$$(322.2a)\quad -z.q_1^1(z) + q_2^1(z) = 1,$$

$$(322.2b)\quad -z.q_k^1(z) + q_{k+1}^1(z) + \varrho.q_{k-1}^1(z) = 0 \quad \text{und}$$

$$(322.2c)\quad (\varrho-z).q_N^1(z) + \varrho.q_{N-1}^1(z) = 0.$$

Aus (322.2a) und (322.2b) bestimmen wir alle $q_k^1(z)$ für $1 < k \leq N$ in Abhängigkeit von $q_1^1(z)$. Die Gleichung (322.2c) liefert dann $q_1^1(z)$

$$(322.3)\quad q_1^1(z) = -\frac{a_{N-1}(z)}{a_N(z)}.$$

Dabei ist die Funktion $a_k(z)$ durch die Rekursion (313.10) bestimmt. Aus (322.1) erhalten wir mit diesem Ergebnis:

$$(322.4)\quad q_0^1(z) = -\frac{1}{z-(1+\varrho)}.\frac{a_{N-1}(z)}{a_N(z)} \quad \text{und}$$

$$(322.5)\quad p_0^1(s) = -\frac{1}{s}.\frac{a_{N-1}(1+\varrho+s)}{a_N(1+\varrho+s)}.$$

Da der Grenzwert von $P_0^1(\sigma)$ für "σ gegen ∞" existiert, gilt nach einem Satz aus der Theorie der LAPLACEtransformation [4]:

(322.6) $$\lim_{\sigma \to \infty} P_o^1(\sigma) = \lim_{s \to 0} s.p_o^1(s) = -\frac{a_{N-1}(1+\varrho)}{a_N(1+\varrho)} = 1.$$

Aus (322.5) können wir sofort $P_o^1(\sigma)$ als Urbild von $p_o^1(s)$ bestimmen, wenn wir die Nullstellen des Nenners $a_N(1+\varrho+s)$ kennen. Wie wir aus der Formel (313.10) und der Darstellung der Funktion $c_k(1+\varrho+s)$ errechnen können, besitzt $a_N(1+\varrho+s)$ die Darstellung

(322.7) $$a_N(1+\varrho+s) = (-1)^N \varrho^{N/2}\left(U_N\left(\frac{1+\varrho+s}{2\varrho^{1/2}}\right) - \varrho^{1/2}.U_{N-1}\left(\frac{1+\varrho+s}{2\varrho^{1/2}}\right)\right).$$

Zwar kennen wir die Nullstellen der einzelnen Polynome $U_k(x)$, doch ist es nicht gelungen für $\varrho \neq 1$ die Nullstellen der vorliegenden Differenz zu bestimmen. In diesen Fällen müssen wir uns einem anderen Verfahren zuwenden, das uns die analytische Gestalt der $P_o^1(\sigma)$ gewinnen hilft. Zunächst aber wollen wir uns mit dem Fall $\varrho = 1$ beschäftigen. In diesem Fall besitzt die durch (322.7) erklärte Funktion $a_N(2+s)$ die N verschiedenen Nullstellen $s_k = -2(1-\cos\theta_k)$ mit $\theta_k = (2k-1)\pi/(2N+1)$. $(k=1,2,\ldots,N)$ Zum Beweis setzen wir für $0 \leq \theta \leq \pi$ $\cos\theta = (2+s)/2$ und erhalten

$$a_N(2\cos\theta) = (-1)^N \frac{\sin(N+1)\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin N\theta}{\sin\theta} = (-1)^N \frac{\cos(2N+1)\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}.$$

Hieraus liest man sofort die Nullstellen ab.
Die Funktion $p_o^1(s)$ besitzt die folgende Partialbruchzerlegung:

$$p_o^1(s) = -\frac{1}{s}.\frac{a_{N-1}(2)}{a_N(2)} + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{s-s_k} \frac{-a_{N-1}(2+s_k)}{-s_k\left(\frac{d}{ds}\, a_N(2+s)\right)_{s=s_k}}.$$

Nun gilt $a_{N-1}(2)/a_N(2) = -1$ sowie

$$a_{N-1}(2+s_k) = (-1)^{N-1}.2.\sin(\Theta_k/2).\sin(2N+1)\Theta_k/2 \quad \text{und}$$

$$\frac{d}{ds}\, a_N(2+s)\Big|_{s=s_k} = (-1)^N.(2N+1)/2.\frac{\sin(2N+1)\Theta_k/2}{4\sin(\Theta_k/2).\cos^2(\Theta_k/2)}.$$

Die Partialbruchzerlegung von $p_o^1(s)$ vereinfacht sich zu

$$(322.8)\qquad p_o^1(s) = \frac{1}{s} - \frac{4}{2N+1}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{s-s_k}.\cos^2(\Theta_k/2).$$

Das Urbild hierzu lautet

$$(322.9)\qquad P_o^1(\sigma) = 1 - \frac{4}{2N+1}\sum_{k=1}^{N}\cos^2(\Theta_k/2).e^{-2(1-\cos\Theta_k)\sigma} \quad \text{für } \sigma \geq 0.$$

Mittelwert und Varianz dieser Verteilung lassen sich daraus auf einfache Weise berechnen:

$$(322.10)\qquad E(b_{\tau_1}) = \frac{1}{2N+1}\sum_{k=1}^{N}\operatorname{ctg}^2(\Theta_k/2) \quad \text{und}$$

$$(322.11)\qquad Var(b_{\tau_1}) = \frac{1}{2(2N+1)}\sum_{k=1}^{N}\frac{\operatorname{ctg}^2(\Theta_k/2)}{\sin^2(\Theta_k/2)} - (E(b_{\tau_1}))^2.$$

Der Grenzübergang "N gegen ∞" in (322.9) liefert die Verteilungsfunktion der Belastungsperioden eines entsprechenden Systems mit beliebig großem Warteraum für $\varrho = 1$:

$$(322.12)\qquad P_o^1(\sigma;N=\infty) = 1 - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos^2(x/2).e^{-2(1-\cos x)\sigma}\,dx.$$

Im Falle $\varrho \neq 1$ bilden wir die erzeugende Funktion

$$(322.13)\qquad P^1(\sigma,z) = \sum_{k=0}^{N} P_k^1(\sigma).z^k$$

und deren LAPLACEtransformierte

$$(322.14)\qquad p^1(s,z) = \sum_{k=0}^{N} p_k^1(s).z^k.$$

Sind die Größen $P_k^1(\sigma)$ Lösungen von (321.6), dann genügt $P^1(\sigma,z)$ der folgenden Gleichung:

$$(322.15)\quad z.\frac{\partial}{\partial\sigma}P^1(\sigma,z) = -(1-z)(\varrho z-1)P^1(\sigma,z) + (1-z)(\varrho z-1)P_o^1(\sigma) + (1-z).\varrho.z^{N+1}P_N^1(\sigma)$$

mit der Anfangsbedingung $P^1(0,z) = z$.

Für $p^1(s,z)$ folgt daraus

$$(322.16)\quad \{s.z + (1-z)(\varrho z-1)\}p^1(s,z) = z^2 + (1-z)(\varrho z-1)p_o^1(s) + (1-z).\varrho z^{N+1}p_N^1(s).$$

Auf der linken Seite von (322.16) hat der Faktor $\{s.z + (1-z)(\varrho z-1)\} = -\varrho.\{z^2 - (1+\varrho+s)/\varrho + 1/\varrho\}$ zwei Nullstellen $\alpha_1(s)$ und $\alpha_2(s)$. Da $p^1(s,z)$ ein Polynom in z ist, und somit an den Stellen $\alpha_1(s)$ und $\alpha_2(s)$ endlich ist, muß auch die rechte Seite von (322.16) diese beiden Werte als Nullstellen besitzen. Wir gewinnen so zwei Bestimmungsgleichungen für $p_o^1(s)$ und $p_N^1(s)$.

$$(322.17)\quad p_o^1(s) = \frac{1}{s}.\frac{1}{\varrho}.\frac{(\alpha_2^N - \alpha_1^N) - (\alpha_2^{N-1} - \alpha_1^{N-1})}{(\alpha_2^{N+1} - \alpha_1^{N+1}) - (\alpha_2^N - \alpha_1^N)},$$

$$(322.18)\quad p_N^1(s) = \frac{1}{\varrho}.\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{(\alpha_2^{N+1} - \alpha_1^{N+1}) - (\alpha_2^N - \alpha_1^N)}.$$

Setzen wir diese beiden Terme in (322.16) ein, und vergleichen wir das Ergebnis mit (322.14), so erhalten wir:

$$(322.19)\quad p_k^1(s) = \frac{1}{\varrho}.\frac{(\alpha_2^{N+1-k} - \alpha_1^{N+1-k}) - (\alpha_2^{N-k} - \alpha_1^{N-k})}{(\alpha_2^{N+1} - \alpha_1^{N+1}) - (\alpha_2^N - \alpha_1^N)} \quad \text{für } 1 \le k \le N \text{ und}$$

(322.20) $p_0^1(s) = \frac{1}{s} \cdot p_1^1(s)$.

Um aus diesen Darstellungen die Wahrscheinlichkeiten $P_k^1(\sigma)$ bestimmen zu können, müssen wir die Eigenschaften der Wurzeln $\alpha_1(s)$ und $\alpha_2(s)$ kennen. Wir beschränken uns in der Folge auf reelle, positive s. Aus den VIETAschen Wurzelsätzen folgt:

(322.21a) $\alpha_1(s) + \alpha_2(s) = (1+\varrho+s)/\varrho$,

(322.21b) $\alpha_1(s) \cdot \alpha_2(s) = 1/\varrho$ und

(322.21c) $-\varrho \cdot (1-\alpha_1(s))(1-\alpha_2(s)) = s$.

Aus den Darstellungen

(322.22a) $$\alpha_1(s) = \frac{1+\varrho+s + \sqrt{(1+\varrho+s)^2 - 4\varrho}}{2\varrho},$$

(322.22b) $$\alpha_2(s) = \frac{1+\varrho+s - \sqrt{(1+\varrho+s)^2 - 4\varrho}}{2\varrho}$$

folgen die Ungleichungen

(322.23a) $\alpha_1(s) > 1 \geq 1/\varrho > \alpha_2(s) > 0$ für $\varrho \geq 1$,

(322.23b) $\alpha_1(s) > 1/\varrho > 1 > \alpha_2(s) > 0$ für $0 < \varrho < 1$.

Berücksichtigt man noch (322.21b) so erhält man:

(322.24) $$0 < \frac{1}{\alpha_1(s)}(1-(1/\varrho)^N(1/\alpha_1(s))^{2N}(1-(1/\varrho)(1/\alpha_1(s)))) < 1.$$

Mit diesen Ungleichungen erhalten wir:

(322.25) $$p_k^1(s) = (1/\varrho)(1/\alpha_1)^k + (1/\varrho)\{-((1/\varrho)^N(1/\alpha_1)^{2N+k} + (1/\varrho)^{N-k}(1/\alpha_1)^{2N-k}) + ((1/\varrho)^N(1/\alpha_1)^{2N+1-k} - (1/\varrho)^{N+1-k}(1/\alpha_1)^{2N+1-k})\} \cdot f(\alpha_1)$$

und

$$(322.26)\quad f(\alpha_1) = (1/\alpha_1).\sum_{i=0}^{\infty}(1/\alpha_1)^i.\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\binom{i}{j}(1/\varrho)^{N.j}(1/\alpha_1)^{2N.j}.$$
$$\sum_{l=0}^{j}(-1)^l\binom{j}{l}(1/\varrho)^l(1/\alpha_1)^l.$$

Damit ist die Funktion für reelle, positive s in eine Potenzreihe nach $1/\alpha_1$ entwickelt. Die Urbilder dieser Größen sind bekannt [2]:

$$(322.27)\quad (1/\alpha_1)^n \longrightarrow \varrho^{n/2}.n.\sigma^{-1}.I_n(2\varrho^{1/2}\sigma).e^{-(1+\varrho)\sigma} \qquad (n>-1),$$

wobei $I_n(x)$ die modifizierte Besselfunktion zum Index n ist. Weiter gilt

$$(322.28)\quad \varrho^{-1/2}.n.\sigma^{-1}.I_n(2\varrho^{1/2}\sigma) = I_{n-1}(2\varrho^{1/2}\sigma) - I_{n+1}(2\varrho^{1/2}\sigma).$$

Wir unterdrücken in den folgenden Formeln das Argument der Funktionen I_n und erhalten auf Grund der Relationen (322.27) und (322.28) als formale Urbilder der Funktionen $p_k^1(s)$ die Funktionen $\tilde{P}_k^1(\sigma)$, von denen wir hoffen, daß sie mit den gesuchten Funktionen $P_k^1(\sigma)$ identisch sind.

$$(322.29)\quad \tilde{P}_k^1(\sigma)$$
$$= \varrho^{(k-1)/2}.e^{-(1+\varrho)\sigma}.(I_{k-1} - I_{k+1})$$
$$+ \varrho^{(k-1)/2}.e^{-(1+\varrho)\sigma}\sum_{i=0}^{\infty}\varrho^{(i+1)/2}\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\binom{i}{j}\sum_{l=0}^{j}(-1)^l\binom{j}{l}(1/\varrho)^{1/2}.$$
$$\left\{ (I_{i+2N(j+1)+l+1-(k+1)} - I_{i+2N(j+1)+l+1-(k-1)}) \right.$$
$$\left. + (I_{i+2N(j+1)+l+1+(k+1)} - I_{i+2N(j+1)+l+1+(k-1)}) \right\}$$
$$+ \varrho^{(k-2)/2}.e^{-(1+\varrho)\sigma}\sum_{i=0}^{\infty}\varrho^{(i+1)/2}\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\binom{i}{j}\sum_{l=0}^{j}(-1)^l\binom{j}{l}(1/\varrho)^{1/2}.$$
$$\left\{ (I_{i+2N(j+1)+l+2-(k+1)} - I_{i+2N(j+1)+l+2-(k-1)}) \right.$$
$$\left. + (I_{i+2N(j+1)+l+2+(k+1)} - I_{i+2N(j+1)+l+2+(k-1)}) \right\}.$$

Es bieten sich zwei Möglichkeiten, diese Funktionen als die gesuchten Wahrscheinlichkeiten nachzuweisen. Entweder wir zeigen, daß alls Rechnungen, die zur Formel (322.29) führten, erlaubt waren, oder wir beweisen direkt, daß die Funktionen $\tilde{P}_k^1(\sigma)$ stetig und differenzierbar sind und das System (321.6) zusammen mit der entsprechenden Anfangsbedingung erfüllen. Wir wählen die zweite Möglichkeit. Auf Grund der Reihendarstellung der Funktionen I_n und der Abschätzungen der Binomialkoeffizienten $\binom{2n}{m} \leq \frac{(2n)!}{n!\ n!}$ und $\binom{2n+1}{m} \leq \frac{(2n+1)!}{n!(n+1)!}$ kann man in der Tat zeigen, daß die durch (322.29) gegebenen Funktionen $\tilde{P}_k^1(\sigma)$ bezüglich σ stetig und differenzierbar sind und wir unter dem Summenzeichen differenzieren dürfen.

Man sieht sofort, daß die Funktionen $\tilde{P}_k^1(\sigma)$ die gegebenen Anfangsbedingungen $P_1^1(0) = 1$, $P_k^1(0) = 0$ für $k \neq 1$ erfüllen, da nur $I_0(0)$ den Wert 1 annimmt und alle anderen Besselfunktionen im Nullpunkt verschwinden.

Die Formel (322.29) ist auch für k=0 sinnvoll und ergibt

(322.30) $\tilde{P}_0^1(\sigma) = 0$ für alle $\sigma \geq 0$.

Wegen $\frac{d}{dz} I_n(z) = (1/2)(I_{n-1}(z) + I_{n+1}(z))$ erhalten wir

(322.31) $\frac{d}{d\sigma} \tilde{P}_k^1(\sigma) = -(1+\varrho)\tilde{P}_k^1(\sigma) + \tilde{P}_{k+1}^1(\sigma) + \varrho.\tilde{P}_{k-1}^1(\sigma)$ für $k \geq 1$.

Zusammen mit (322.30) ergibt sich die zweite Gleichung von (321.6). Mit Hilfe identischer Umformungen erhält man

(322.32) $-\varrho.\tilde{P}_N^1(\sigma) + \tilde{P}_{N+1}^1(\sigma) = 0$.

(322.32) und (322.31) liefern die letzte Gleichung von (321.6). Die gesuchte Verteilungsfunktion erhalten wir nun als die Stammfunktion von $\tilde{P}_1^1(\sigma)$, die bei $\sigma=0$ verschwindet

BIBLIOGRAPHIE:

[1] H. BATEMAN: Higher Transcendental Functions, vol. 2 (ed. ERDELYI), McGraw-Hill, New York, 1953.

[2] H. BATEMAN: Tables of Integral Transforms, vol. 1 (ed. ERDELYI), McGraw-Hill, New York, 1954.

[3] K. L. CHUNG: Markov Chains (p. 137), Springer, Berlin 1960.

[4] G. DOETSCH: Handbuch der LAPLACEtransformation, vol. 1 (p. 458), Birkhäuser, Basel, 1950.

[5] E. KAMKE: Partielle Differentialgleichungen, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1962.

[6] E. KAMKE: Differentialgleichungen reeller Funktionen, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1950.

[7] J. KEILSON, A. KOOHARIAN: On The General Time Dependent Queue with a Single Server, Ann. math. Stat.,vol 33,1962.

[8] J. KEILSON, A. KOOHARIAN: On time dependent queueing processes, Ann. math. Stat., vol. 31, 1960.

[9] PH. M. MORSE: Queues, Inventories ans Maintenance, J. Wiley, New York, 1962.

[10] J. E. MOYAL, C. R. HEATHCOTE: The Random Walk and Its Application to The Theory of Queues, Biometrika, vol 46,1959.

[11] TH. L. SAATY: Elements of Queueing Theory, McGraw-Hill, New York, 1961.

[12] H. SÖHNGEN: Vorlesung über Warteschlangentheorie (gehalten im WS 1963/64 am Math. Inst. der Universität des Saarlandes).

[13] K. STANGE: Die Anlauflösung für den einfachen exponentiellen

Bedienungskanal (mit beliebig vielen Warteplätzen), der für t=0 leer ist. Unternehmensforschung, vol. 8, Heft 1, (p. 1-24), Physica-Verlag, Würzburg, 1964.

[14] G. WATSON: Theory of Bessel Functions, University Press, Cambridge, 1958.

LEBENSLAUF.

Am 25. August 1936 wurde ich als Sohn der Eheleute Wilhelm Schmidt und Elisabeth, geb. Schneider in Klarenthal geboren und in der dortigen evangelischen Kirche getauft.

Ab Herbst 1942 besuchte ich fünf Jahre die Volksschule Klarenthal, von der ich 1947 zum Realgymnasium Völklingen überwechselte.

Nach dem Abitur im Jahre 1956 begann ich an der Universität des Saarlandes das Studium der Mathematik, das ich im April 1961 mit dem Diplomexamen abschloß.

Seit Juli 1962 bin ich verheiratet.

Gerd Schmidt